ISSN 2448-3230

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS COM LADOS INTEIROS

Charlene Dias Leite

Leonardo Bernardo de Morais

Raquel Costa da Silva

Resumo

A maior descoberta de Pitágoras foi o teorema que leva seu nome, ensinado hoje em escolas de todo mundo. Ao observar os triângulos retângulos, o filósofo notou que eles obedecem um a lei matemática: A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. O estudo dos triângulos retângulos com lados inteiros desperta um grande interesse, pois facilitaram e tornaram mais precisas as construções. Provavelmente do século VI a.C., foram descobertos escritos religiosos com regras geométricas para construção de altares, mediante o esticamento de cordas, em que se revela um certo conhecimento dos ternos pitagóricos pelos Hindus. Nesse trabalho apresentamos alguns teoremas que dão condições necessárias e suficientes para que um terno (x,y,z) de números inteiros positivos seja um terno pitagórico. O objetivo principal desse trabalho é usar esses resultados e mostrar que quando x ≥ 3, existe pelo menos um triângulo retângulo com cateto x e também mostrar como encontrar todos eles e determinar quantos são em função da decomposição de x em fatores primos. Dentro dos resultados, constatou-se que, podemos determinar todos os ternos inteiros e o número de triângulos retângulos de maneira simples usando os resultados apresentados.

Palavras-chaves: Teorema de Pitágoras; Ternos Pitagóricos; Triângulo Retângulo.

Introdução

A Teoria dos Números é a área da matemática que investiga relações entre os números inteiros positivos. Por volta de 1700 A.C. foram encontradas, na Babilônia, tabelas contendo listas de ternas de números inteiros com a propriedade de que um dos números quando elevado ao quadrado era igual à soma dos quadrados dos outros dois.

II Sertão Pernambucano. E-mail: charlene.matematica@gmail.com, leonardo.morais@ifsertao-pe.edu.br, raquelmendiola@yahoo.com.br.

Segundo Eves (2002), como tais listas eram extensas, acredita-se que os babilônios já possuíam um método sistemático de gerar tais ternas. Há registros históricos que comprovam a existência e uso de tais tabelas no Egito antigo. Considere os quadrados dos números naturais 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 ... . Se tomarmos a soma de dois quadrados, eventualmente obteremos como resultado um outro quadrado. O exemplo mais famoso desse fato é: $3^2+4^2=5^2$, mas existem outros exemplos: $5^2+12^2 = 13^2$, $20^2+21^2 = 29^2$, e muitos outros. Contudo $2^2+3^2 =13$ não é um quadrado. Como tais regras se assemelham aos exemplos babilônicos, isso faz pensar que talvez ela não seja uma descoberta independente (BOYER, 1974).

Portanto, é natural perguntar se existe um número infinito de ternas Pitagóricas. A resposta é afirmativa e o motivo é muito simples: se (x, y, z) é uma terna Pitagórica, então ao multiplicá-la por um inteiro positivo c, obtemos (cx, cy, cz) que é uma nova terna Pitagórica, pois, $(cx)^2+(cy)^2= c^2(x^2+y^2) = c^2z^2 = (cz)^2$.

Por outro lado, os Pitagóricos estavam interessados nos triângulos retângulos cujos catetos têm comprimento inteiro x e y e o comprimento z da hipotenusa se relaciona com x e y de modo que $z^2 = x^2+y^2$ (Rothbart e Paulsell, 1985). Tal relação é o o famoso Teorema de Pitágoras. A procura de todos os inteiros positivos que satisfazem à identidade $x^2+y^2=z^2$ é equivalente ao problema de se determinar todos os triângulos retângulos cujos lados são inteiros.

Nesse trabalho apresentamos alguns teoremas que dão condições necessárias e suficientes para que um terno (x,y,z) seja um terno pitagórico. O objetivo principal desse trabalho é usar esses resultados e mostrar que quando $x \geq 3$, existe pelo menos um triângulo retângulo com cateto x e também mostrar como encontrar todos eles e quantos são em função da decomposição de x em fatores primos.

Método

Nosso objetivo é fazer uma revisão de literatura do tema, no entanto, utilizando uma linguagem simples, que possa ser entendida por qualquer aluno de ensino médio, ou até mesmo de nível fundamental.

Vamos utilizar ferramentas elementares, como produtos notáveis, propriedades de potências e radicais. No entanto, vamos também usar ferramentas mais sofisticadas, como o Teorema Fundamental da Aritmética e divisibilidade, mas apresentando de maneira que seja simples para qualquer nível de escolaridade dos leitores.

Resultados

Vamos apresentar resultados que dão condições necessárias e suficientes para que um terno seja pitagórico.

Teorema 1: (x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros u e v tais que u $>$ v $>$ 0, u e v têm a mesma paridade, u.v é um quadrado perfeito, onde x = $\sqrt{u.v}$, y = $\frac{u-v}{2}$ e z = $\frac{u+v}{2}$.

Demosntração: Suponha que (x, y, z) é um terno pitagórico. Como $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$. Sejam u = z + y e v = z – y. Então u e v são inteiros tais que u > v > 0 , u e v têm a mesma paridade, u.v é um quadrado perfeito, x = $\sqrt{u.v}$, y = $\frac{u-v}{2}$ e z = $\frac{u+v}{2}$.

Reciprocamente, suponha que u e v satisfazem às condições do teorema. Como u e v têm a mesma paridade e u > v > 0, então y = $\frac{u-v}{2}$ e z = $\frac{u+v}{2}$ são inteiros positivos.

Assim, $x^2 + y^2 = (\sqrt{u\,v})^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{4\,uv + u^2 - 2uv + v^2}{4} = \frac{u^2 + 2uv + v^2}{4} = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = z^2$,

e (x, y, z) é um terno pitagórico.

Agora vamos determinar todos os triângulos retângulos com cateto x (triângulos retângulos com catetos fixos). Primeiro observamos que para x = 1 ou x = 2, não existem triângulo retângulos com este cateto. Com efeito, não existem inteiros positivos u e v, tais que u > v > 0, u e v têm a mesma paridade, u.v é um quadrado perfeito e x^2 = u.v, isto é u.v = 1 ou u.v = 4.

Proposição1: Se x $\geq$ 3, existe um triângulo retângulo com cateto x.

Demonstração: Se x é ímpar, tomamos u = x^2 e v = 1, com x $\geq$ 3 e u > v. Se x é par, tomamos u = $\frac{x^2}{2}$ e v = 2, com x ≥ 4 e u > v. Basta aplicar o Teorema 1.

Para se determinar todos os triângulos retângulos com cateto x, tomamos todas as decomposições $x^2 = uv$, com u > v e u e v com a mesma paridade.

Se x é impar, escrevemos $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$, com os $p_i's$ primos distintos de $r_i > 0$, para todo i = 1,2, …, k. Como $x^2 = p_1^{2r_1} p_2^{2r_2} \ldots p_k^{2r_k}$, x^2 tem $(2\,r_1 + 1)(2r_2 + 1)\ldots(2r_k + 1)$ divisores que formam pares (u,v) tais que $x^2 = uv$. Mas, pelo Teorema 1, só estamos interessados nos pares (u,v) tais que u > v. Assim, o par (x, x) deve ser desprezado, e dos demias, apenas a metade satisfaz a condição u . v. Assim, levando em conta que para cada par (u,v) acima com u > v existe um triângulo retângulo com cateto x, se x é um número ímpar, existem

$$m = \frac{(2\,r_1 + 1)(2r_2 + 1)\ldots(2r_k + 1) - 1}{2}$$

triângulos retângulos não semelhantes com catetos x.

Agora suponha x par, então escrevemos então $x = 2^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \ldots p_k^{r_k}$, com os $p_i's$ ímpares distintos de $r_i > 0$ e para todo i = 1, 2, …, k. Então existe um triângulo retângulo com cateto x, e existem

$$m = \frac{(2\,r_1 - 1)(2r_2 + 1)\ldots(2r_k + 1) - 1}{2}$$

triângulos retângulos não semelhantes com catetos x.

Resumindo temos o seguinte resultado:

Teorema 2: Seja x um inteiro tal que $x \geq 3$. Escrevemos $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ se x é ímpar e $x = 2^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \ldots p_k^{r_k}$ se x é par, com com os $p_i's$ primos ímpares distintos de $r_i > 0$. Então existem m triângulos retângulos não semelhantes com catetos x, onde

$$m = \frac{(2\,r_1 + 1)(2r_2 + 1)\ldots(2r_k + 1) - 1}{2}$$

se x é ímpar, e

$$m = \frac{(2\,r_1 - 1)(2r_2 + 1)\ldots(2r_k + 1) - 1}{2}$$

se x é par.

Para mais detalhes (ver Andrade, 2013).

Exemplos

Exemplo 1: x = 45 = $3^2 \times 5$

Vamos encontrar todos os triângulos retângulos com um dos catetos iguais a 45. Como 45 é ímpar, determinamos inicialmente todos os pares (u, v) tais que 45^2 = 2025 = uv com u > v. são eles: (2025, 1), (675,3), (405, 5), (225, 9), (135, 15), (81, 25) e (75, 27). Os valores para x = $\sqrt{uv}$, y = $\frac{u-v}{2}$ e z = $\frac{u+v}{2}$ então calculados na tabela abaixo

u	v	x	y	z
2025	1	45	1012	1013
675	3	45	336	339
405	5	45	200	205
225	9	45	108	117
135	15	45	60	75
81	25	45	28	53
75	27	45	24	51

Observe que em todos os casos temos $x^2 + y^2 = z^2$ e que o número de triângulos retângulos, 7, de acordo com o Teorema 2.

Exemplo 2: x = 72 = $2^3 \times 3^2$

Vamos encontrar todos os triângulos retângulos com um dos catetos iguais a 72. Como 72 é par, determinamos inicialmente todos os pares (u', v') tais que $\frac{72^2}{4}$ = 1296 = $u'\ v'$com $u' > v'$. Os valores para u = 2 u', v = 2 v', x = $\sqrt{uv}$, y = $\frac{u-v}{2}$ e z = $\frac{u+v}{2}$ estão calculados abaixo:

u'	v'	u	v	x	Y	z
1296	1	2592	2	72	1295	1297
648	2	1296	4	72	646	650
432	3	864	6	72	429	435
324	4	648	8	72	320	328
216	6	432	12	72	210	222

162	8	324	16	72	154	170
144	9	288	18	72	135	153
108	12	216	24	72	96	120
81	16	162	32	72	65	97
72	18	144	36	72	54	90
54	24	108	48	72	30	78
48	27	96	54	72	21	75

Observe que em todos os casos temos $x^2 + y^2 = z^2$ e que o número de triângulos retângulos, 12 está de acordo com o teorema 2.

Conclusões

Vimos que por meio de ferramentas elementares podemos mostrar resultados elegantes da Teoria dos Números. Os ternos pitagóricos são é um mistério para muitos alunos, no entanto, utilizando um pouco de álgebra básica, podemos determinar todos os ternos inteiros e o número de triângulos retângulos de maneira simples, e sem mistérios.

Referências

[1] Andrade, J.F. Tópicos Especiais em Álgebra. SMB, Rio de Janeiro, 2013.

[2] Boyer, C.B. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

[3] Eves, H. *Introdução á História da Matemática*. Unicamp, 3ª edição.

[4] Rothbart, Andrea e Paulsell, Bruce, *Números Pitagóricos: uma fórmula de fácil dedução e algumas aplicações geométricas*, Revista do Professor de Matemática 7 (1985) 49 -51.