ANAIS DA VIII SEMANA DE MATEMÁTICA DA URCA - CAMPUS CAMPOS SALES

2022

ORGANIZADORES: CICEFRAN SOUZA DE CARVALHO; JOSÉ AUGUSTO PEREIRA NOGUEIRA; LAENE AUGUSTO DE OLIVEIRA

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Regional do Cariri / Unidade Descentralizada de Campos Sales / Curso de Licenciatura Plena em Matemática / VIII Semana de Matemática da URCA / UD Campos Sales, 2021.
CARVALHO, C. S.; NOGUEIRA, J. A. P. e OLIVEIRA L. A. (orgs.). Anais da VIII Semana de Matemática da URCA / UD Campos Sales – ISSN 2448-3230. Campos Sales (CE), 2021.

SUMÁRIO

A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA BÁSICA NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Antonia Nara de Alencar [1]

Sabrina Bento Pereira [2]

José Augusto Pereira Nogueira [3]

RESUMO: Que a matemática ainda é considerada uma das disciplinas mais complicadas de se estudar, já sabemos, esse pensamento é construído por aqueles estudantes que muitas vezes não compreendem a disciplina ou tendem a obter resultados negativos em avaliações da área. Contudo quando essa "dificuldade" permanece na vida do estudante em especial aqueles que chegam ao ensino superior, temos que agir. As quatro operações básicas, frações, MMC, MDC e regras que envolvem radicais e potenciações que são estudadas no ensino fundamental e aprimoradas no decorrer do tempo são a base para a estruturação do ensino da matemática, e que muitas vezes são fontes de atrasos para os estudantes. E o que fazer quando essas complicações permanecem com os alunos de ensino superior, excepcionalmente aos estudantes de licenciatura em Matemática? Esses impasses surgem por motivos diversos, tais como: a metodologia adquirida pelo professor dos anos iniciais, por não se ter uma base bem elaborada quanto ao entendimento do conteúdo, déficit de atenção, entre outros que poderiam ser analisados pelo professor regente e feita as suas devidas providencias, erradicando-as. Dessa forma, esse minicurso tem por objetivo revisar os conteúdos básicos da matemática que são essenciais para a continuação do estudo das disciplinas ofertadas pelo Curso de Matemática, em especial o Cálculo Diferencial e Integral, onde o estudo fica cada vez mais complexo. O mesmo acontecerá em duas etapas onde a primeira está relacionada as operações básicas e ao relato dos participantes quanto as dificuldades encontradas na mesma, a segunda etapa é de cunho conclusivo onde se revisará os conteúdos de maior utilização em limites, derivadas e integrais.

Palavras-chave: Matemática Básica. Dificuldades. Operações.

Referências

VALENTE, W.R. **O Lugar da Matemática Escolar na Licenciatura em Matemática**. **SciELO**, 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/BqKRJ4CByWcMzpZhTFmSJZh/?lang=pt

[1] Universidade Regional do Cariri, e-mail: antonia.nara@urca.br
[2] Universidade Regional do Cariri, e-mail: sabrina.bento@urca.br
[3] Universidade Regional do Cariri, e-mail: augusto.nogueira@urca.br

Acesso em: 25 de novembro de 2021.

ZABALA, Antoni; ARNAU, Laia. **Como aprender e ensinar competências**. Tradução de Carlos Henrique Lucas Lima. Porto Alegre: Artmed, 2010. p. 45 - 53.

OPERAÇÕES com frações. **Mundo Educação**, . Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/operacoes-com-fracoes.htm Acesso em: 25 de novembro de 2021.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **"O que são produtos notáveis?";** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-produtos-notaveis.htm
Acesso em: 25 de novembro de 2021.

A IMPORTÂNCIA DA MONITORIA NA FORMAÇÃO ACADÊMICA NO CURSO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI - URCA

Francisca Ferreira Agostinho [1]

Samya de Oliveira Lima [2]

RESUMO: Este trabalho visa descrever a experiência durante a monitoria da disciplina de Prática de Ensino III no curso de Licenciatura em Matemática - Universidade Regional do Cariri-URCA. Compreende-se por monitoria a modalidade de ensino-aprendizagem, dentro das necessidades de formação acadêmica destinada ao estudante regulamente matriculado, proporcionando condições para a iniciação da prática docente, onde o monitor desenvolvera habilidades e competências que o auxiliara na prática pedagógica. É um período onde o discente vivenciara a experiência de um professor e aluno ao mesmo tempo, este é um momento de grande aprendizagem e de crescimento coletivo, onde compreendemos a transcendência de saber-fazer teórico e prático, possibilitando o crescimento pessoal, intelectual e profissional. O presente trabalho é de cunho descritivo e tem como objetivo mostrar a importância da bolsa de monitoria ofertada na universidade para a formação docente, apresentar as vantagens oferecidas como o desenvolvimento de habilidade e experiências adquiridas durante a monitoria. Essa bolsa é um instrumento de aprendizagem para a formação e desenvolvimento acadêmico o discente monitor.

Palavras-chave: Monitoria. Monitor. Habilidade. Docência.

1. Introdução

A monitoria acadêmica é uma atividade que se constitui como um instrumento de ensino aprendizagem que promove a compreensão e a produção do conhecimento universitário, visto que na maioria das vezes o aluno se envolve com a ciência assim como programas de iniciação cientifica e extensão. Assim como Campos (2004) ressalta que, programas de monitoria, pesquisa e extensão são importantes para formar profissionais que tenham competência e compromisso com a educação e possam, em breve, assumir a responsabilidade com a educação, com a docência e com a aprendizagem.

[1] Universidade Regional do Cariri - URCA, e-mail: fanquinha.agostinho@urca.br

[2] Universidade Regional do Cariri - URCA, e-mail: samya.lima@urca.br

As atividades de monitoria também se mostram extremamente enriquecedoras para o monitor do curso de licenciatura em matemática, pois a experiência permite aproximação ao exercício à docência e também a orientação de um professor para melhor se desenvolver profissionalmente. O monitor desenvolve e trabalha suas habilidades com relação à docência, pois este não vai apenas compreender a disciplina, mas, buscar desenvolver maneiras de transmiti-la aos estudantes.

De acordo com Matoso (2013), o exercício da monitoria é uma oportunidade para o monitor discente observar e estudar conhecimentos na disciplina específica e contribuir com o processo de ensino a aprendizagem dos discentes-monitorados. O monitor, ao unir teoria e prática, pode tornar-se autocrítico, assim, torna-se um investigador da própria prática docente, observando suas limitações e habilidades, podendo assim aprimorá-las.

Dessa forma a monitoria oportuniza ao monitor a experiência de viver a prática docente, permitindo a este o desenvolvimento como aluno e futuro professor. O exercício de monitoria também traça caminhos inerentes à pesquisa cientifica, importante processo na vida do estudante de licenciatura.

Nesse sentido, este trabalho tem como principal objetivo relatar de maneira descritiva aos benefícios da experiência vivida na monitoria de ensino na disciplina de Prática de Ensino III, do curso de Licenciatura em Matemática – Universidade Regional do Cariri vivido de forma remota no ano de 2021.

2. Objetivos

Este trabalho tem como objetivo mostrar a importância das bolsas de monitoria durante a graduação para a formação docente, apresentar os benefícios oferecidos como as habilidades e experiências adquiras ao longo do período de monitoria.

3. Metodologia

O presente trabalho trata-se de um estudo descritivo, do tipo relato de experiência, realizado a partir da vivência discente na monitoria da disciplina de Prática de Ensino III no curso de Licenciatura em Matemática – Universidade Regional do Cariri. A monitoria foi realizada de forma remota devido à pandemia causada pelo novo coronavírus.

As atividades foram realizadas de acordo com o plano de atividade e conteúdos programáticos do componente curricular elaborado pela a professora antes do início das aulas. Foi um momento muito proveitoso em poder planejar e desenvolver atividades, pesquisas, correção de atividades, estudo de teorias dentre outros. Dessa forma visando contribuir para o processo de ensino aprendizagem, bem como para a formação acadêmica. No decorre do, período letivo todas as atividades desenvolvidas com os discentes do componente curricular de Prática de Ensino III foram acompanhadas pelo monitor.

4. Resultados

A importância das bolsas de monitorias nas universidades ultrapassa a obtenção de um título ou enriquecimento do currículo. Sua experiência e de extrema relevância, seja no aspecto pessoal, profissional, nas contribuições ofertadas aos alunos monitorados e, principalmente, na relação de troca de conhecimentos entre professor, monitor e alunos. A monitoria possibilita ao monitor uma maior interação com os alunos e com a prática docente, vivendo uma experiência do exercício da docência na universidade.

É um momento de grande aprendizagem e de crescimento coletivo, onde vivenciamos a formação profissional e compreendemos a importância de saber-fazer teórico e prático. Durante esta experiência temos a possibilidade criar e recriar novas metodologias e práticas pedagógicas. Todos os aprendizados construídos em conjunto ao professor orientador e aos alunos monitorados contribui para a formação intelectual e social do monitor, proporcionado novas perspectivas assim como também descobrindo novas vocações.

Nesse sentido "O trabalho de monitoria pretende contribuir com o desenvolvimento da competência pedagógica e auxiliar os acadêmicos na apreensão e produção do conhecimento" (SCHNEIDER, 2006). Desde a graduação devemos desenvolver habilidades e características que molde um profissional qualificado, empático e ciente do seu impacto como educador. No decorrer da monitoria e no desempenho das suas atividades, o monitor sempre que necessário rever conteúdos e reinterpretá-los, permitindo um aprofundamento teórico, consolidando os conteúdos e assim estabelecendo uma relação próxima a educando, percebendo suas dificuldades.

O destaque ao ensino das habilidades da docência é um fato muito importante na formação inicial, pois quanto mais dominar essas habilidades melhor é o aprofundamento de seus conhecimento teórico-prático. E durante este período que o estudante tem a experiência com seu futuro campo de trabalho docente, descobrindo o gosto de contribuir pedagogicamente com o aprendizado ou até mesmo a momentânea desilusão, em situações em que a atitude de alguns estudantes mostra-se inconveniente e desestimuladora.

Nesse sentido, observamos que a disciplina de Prática de Ensino III é de suma importância no estudo da Filosofia da Matemática e da Educação Matemática. Os estudantes demonstram interesse a respeito da orientação da monitoria, alguns manifestavam dificuldades em relação a alguns dos conteúdos e sempre buscávamos uma solução para melhor compreensão. Foi notória como o exercício da docência é um processo árduo, sobretudo no aspecto do acompanhamento de todo o planejamento das aulas e seus conteúdos.

5. Considerações Finais

A monitoria acadêmica é uma atividade bem significativa para os educandos que buscam uma experiência em sala de aula no decorrer da graduação. Durante este período o monitor compreende como funciona o processo de aprendizagem em um curso de graduação e conhecer a rotina de um professor universitário principalmente nesse momento de pandemia.

Diante as dificuldades de lecionar a distância, devido à exaustão de estar muito tempo em frente as telas digitais, pode-se observar a busca de torna as aulas mais atrativas que despertasse o interesse dos alunos, ao longo das aulas os conteúdos eram trabalhados de forma dinâmica e interativa, buscando a participação dos alunos e garantindo o engajamento da turma.

A monitoria contribui significativamente para a prática docente, colaborando de forma concreta com a aprendizagem do monitor e dos demais alunos, proporcionando também a troca de conhecimentos entre os membros envolvidos. E cabe a instituição de ensino a importante função de selecionar alunos aptos e capacitados para que junto ao professor desenvolva uma aprendizagem significativa com todos.

Ser um profissional da educação requer muito esforço e determinação, antes mesmo de ingressar na graduação vencemos desafios e nos superamos a cada semestre que cursamos, pois manter uma vida estudantil, não é uma tarefa fácil. Porém desistir dos nossos sonhos não é possível, pois deixar uma parte de nós para traz não faz sentido. Ao entrar na faculdade descobrimos e entendemos o amor pela docência, pela a aprendizagem, pelo mundo melhor e o desejo de mudança só cresce a cada dia.

Referências

CAMPOS, Casemiro de Medeiros. Monitoria: a iniciação à docência. In: ABSIL, Wilhelmus Jacobus (Org.). Pedagogia universitária: refl exões sobre a experiência docente na educação superior. (Temas Pedagógicos, n. 12). Fortaleza: Universidade de Fortaleza, 2004.

MATOSO, L. M. L; A Importância da Monitoria na Formação Acadêmica do Monitor: um Relato de Experiência. In: Revista Científica da Escola da Saúde. Repositório Científico, 2013. P. 1-7.

SCHNEIDER, M.S.P.S. Monitoria: instrumento para trabalhar com a diversidade de conhecimento em sala de aula. Revista Eletrônica Espaço Acadêmico, v. Mensal, p.65, 2006.

A PRODUÇÃO DO ARTIGO CIENTÍFICO:

DESAFIOS E POSSIBILIDADES

Veronica Nogueira do Nascimento[1]

RESUMO: O ensino, a pesquisa e a extensão são os três pilares que fundamentam as ações universitárias. A pesquisa destaca-se pela sua relevância na disseminação do conhecimento e as suas contribuições para a resolução dos diversos problemas – sociais, políticos, econômicos e ambientais – através da produção científica. O presente minicurso tem por objetivo geral proporcionar aos participantes conhecimentos sobre a construção de artigos científicos. Diante deste, busca-se: discutir acerca das contribuições da produção científica para a sociedade; dialogar sobre a relevância da publicação científica para o Currículo Lattes e as seleções de Mestrado e Doutorado; e apresentar os elementos que constituem o artigo científico. O minicurso terá duração de quatro horas, sendo ministrado em dois encontros de duas horas cada. Para realização deste, buscando garantir que o conteúdo proposto seja trabalhado, será utilizada uma metodologia expositiva-dialógica, com o auxílio de slides para apresentação dos conteúdos; artigos científicos; sites de revistas científicas e plataformas eletrônicas. Todo o minicurso será mediado pelo diálogo entre a facilitadora e os participantes, proporcionando momentos de trocas de experiências e soluções de possíveis dúvidas. Incentivar a produção científica na Universidade, estimula a conscientização para a qualidade destas pesquisas, contribuindo para a formação de profissionais cientes das suas responsabilidades sociais frente a produção e a divulgação do conhecimento científico.

Palavras-chave: Pesquisa. Artigo Científico. Publicação.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT. **NBR 6022:** informação e documentação: artigo em publicação periódica técnica e/ou científica: apresentação. Rio de Janeiro, 2018.

GAMBOA, Silvio Sanchez. **Pesquisa em Educação:** métodos e epistemologias. 2. ed. Chapecó (SC): Argos, 2012.

MARCONI, Marina de Andrade.; LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia científica.** 7. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

VOLPATO, Gilson Luiz. O método lógico para redação científica. **RECIIS – Revista Eletrônica de Comunicação, Informação e Inovação em Saúde,** v. 9, n. 1, jan./mar., 2015.

[1] Universidade Regional do Cariri – URCA, e-mail: veronica.nogueira@urca.br

Acessibilidade no ensino de matemática para a pessoa com deficiência visual

Elainy Bezerra Vieira [1]

Walla Nascimento De Souza [2]

Raquel Costa da Silva [3]

Jeniffer J. Duarte Sanchez [4]

RESUMO: As reflexões e debates acerca de temas voltados a inclusão e acessibilidade vem se tornando frequentes no âmbito educacional, visto que a presença de alunos com deficiências nos bancos escolares vem tendo um enorme crescimento nos últimos anos, devido principalmente às politicas de inclusão. Devido a esse crescimento, busca-se desenvolver estratégias e metodologias que sejam adequadas para enfrentar as barreiras que dificultam o ensino e aprendizagem destes. É importante garantir à pessoa com deficiência um ensino igualitário e de qualidade, pois a educação é um direito de todos, como previsto na Constituição Federal de 1988, visando à inclusão e participação dos mesmos na sociedade. A Matemática é essencial no currículo e na vida dos estudantes, ela é repleta de conceitos abstratos que fazem o uso da visão para serem compreendidos, como as representações numéricas, algébricas e geométricas. Para a pessoa com deficiência visual a abstração torna-se tarefa árdua, mas não impossível. Para que haja aprendizagem é preciso da união da escola, do docente, da família e demais discentes. O professor como transmissor do conhecimento, precisa se reiterar, manipular e adaptar recursos didáticos, de forma que haja a participação efetiva destes estudantes em sala de aula. Com isso, o professor necessita ter conhecimento sobre recursos acessíveis que possibilitem o estudante com deficiência visual compreender os assuntos explanados por ele. Com o avanço da inclusão, há muitos recursos que possibilitam a pessoa com deficiência visual ter a compreensão de inúmeros conceitos visuais sem a visão. Um desses recursos é a audiodescrição, que consiste na tradução de imagens, lugares e pessoas em palavras, por meio de uma narração objetiva, que em conjunto com as falas originais, permite a compreensão integral do contexto, com esse recurso pode-se trabalhar gráficos, matrizes entre outros conteúdos. Há também muitos materiais que auxiliam no ensino de matemática para cegos e pessoas com baixa visão, são eles geoplano, soroban, tangram, material dourado, disco de frações, ábaco, multiplano, figuras geométricas, entre outros. Cada um deve ser usado de acordo com a necessidade tanto de professor, quanto dos alunos. Tendo em vista os pontos colocados acima, este trabalho traz a proposta de um minicurso com carga horária de 2 horas, voltado a trabalhar acessibilidade e recursos acessíveis que auxiliem no ensino de matemática para deficientes visuais. Através deste minicurso o docente e discente de matemática terão a oportunidade de entender sobre a deficiência visual, acessibilidade e recursos acessíveis no ensino de matemática. Juntos,

[1] If Sertão - PE, e-mail: elainyvieira68@gmail.com
[2] If Sertão - PE, e-mail:walla.nascimento@aluno.ifsertao-pe.edu.br
[3] If Sertão - PE, e-mail: raquel.costa@ifsertao-pe.edu.br
[4] Universidade Federal do Ceará, e-mail: jjduartes@dema.ufc.br

trabalharemos, a fim de contribuir com a Educação Inclusiva, de profissionais dedicados e dispostos a inovar, sempre.
Palavras-chave: Inclusão; Acessibilidade; Deficiência visual; Matemática.

ALFAMATECA COMO RECURSO PARA O ENSINO APRENDIZAGEM DE CRIANÇAS CEGAS

Francisco Lucas Nicolau da Silva [1]

José Edinaldo de Oliveira Cavalcante [2]

Cicefran Souza de Carvalho [3]

RESUMO: Este trabalho apresenta o software AlfaMateca, destinado ao ensino e aprendizagem de crianças cegas ou com baixa visão na fase de alfabetização, o mesmo usa como base as atividades contidas no livro PNLD 2016-2018 "ÁPis Alfabetização Matemática 1°,2° e 3° ano". Os métodos utilizados nesse trabalho consistiram na leitura e analise de documentos disponíveis no site AlfaMateca e na produção e apresentação do minicurso intitulado "AlfaMateca na Alfabetização de Crianças Cegas", os relatos e vivencias observados durante a aplicação do mesmo foram importantes, pois foi destinado a educadores e gestores de instituições nacionais por meio do I congresso de Práticas Inclusivas na Educação. O trabalho se justifica pela importância do uso em sala de aula de ferramentas capazes de auxiliar no ensino e potencializar a aprendizagem, sendo esta plataforma citada um excelente meio que pode e deve ser usado para o ensino/aprendizagem das crianças cegas ou com baixa visão, por ser de fácil acesso e manuseio, portanto o AlfaMateca é uma plataforma essencial que pode agregar grandes transformações na vida dos discentes.

Palavras-chave: AlfaMateca. Educação. Software de aprendizagem. Inclusão.

1. Introdução

A educação tem sofrido muitas mudanças ao longo da história, sendo ajustada para atender as necessidades de todos e por ser flexível permite o uso de diversas ferramentas e metodologias que facilitam e dinamizam o ensino e a aprendizagem. Assim, se tornou passível que todos, sem distinção possam ensinar e aprender tanto no ambiente escolar como em meio à sociedade.

Dessa forma é perceptível a pluralidade da sociedade no Brasil e se faz necessário a adaptação das instituições de ensino para atender as demandas que surgem a todo o momento, sendo que há muitas necessidades como as limitações físicas, motoras, cognitivas, sensoriais e múltiplas, entre estas estão às pessoas cegas ou aquelas com baixa visão.

[1] Graduando em Matemática pela Universidade Regional do Cariri-URCA, e-mail: fclucasnicolau@outlook.com.br

[2] Graduando em Matemática pela Universidade Regional do Cariri-URCA, e-mail: edinaldooliveira538@gmail.com

[3] Doutor em Educação pela Absoulute Christian University - ACU, e-mail: cicefran.carvalho@urca.br

Com base nos dados do censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística-IBGE de (2010) evidenciam que aproximadamente 18% (dezoito por cento) da população brasileira possuem algum grau de deficiência visual. Desse total, cerca de 6,5 (seis vírgula cinco) milhões apresentam deficiência visual severa, sendo que 506 (quinhentos e seis) mil têm perda total da visão o que corresponde a 0,3% da população e 6 (seis) milhões, grande dificuldade para enxergar o que equivale a 3,2% da população.

A inclusão de discentes especiais é um direito que as leis Brasileiras garantem, e tem sido debatida por meios dos documentos nacionais, como: Constituição Federal 1988, Convenção sobre os Direitos de Pessoas com Deficiência, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e a Declaração Mundial sobre Educação para todos, dentre outros que regularizam a inclusão dos direitos com qualquer tipo de deficiência nas escolas.

O AlfaMateca é composto por oito capítulos, totalizando duzentas e trinta questões. Sendo assim, esse software foi desenvolvido com o proposito de oferecer uma alternativa ao problema apresentado, sendo concisamente um aplicativo que segue as orientações e atividades do livro sugerido pelo PNLD 2016 - 2018 “ÁPis Alfabetização Matemática 1º/2º/3º ano”.

O livro foi escolhido devido a sua grande aplicação por parte das escolas públicas no Brasil. Com base nos dados do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) o livro “Projeto ÁPis – Alfabetização Matemática 1º ano” da coleção do PNLD dos anos 2016, 2017 e 2018 teve 1.411.498 (um milhão quatrocentos e onze mil quatrocentos e noventa e oito) exemplares distribuídos no ano de 2016.

Assim, esse trabalho tem como objetivo mostrar como a plataforma AlfaMateca pode auxiliar no ensino/aprendizagem de crianças cegas ou com baixa visão, além dos desafios enfrentados pelas instituições de ensino frente a pluralidade da sociedade, bem como a plataforma AlfaMateca funciona e quais suas contribuições para a educação desses alunos.

O trabalho se justifica por expor o presenciado nos estudos sobre o site e as experiências observadas nas aplicações relatadas em documentos produzidos e expostos no site destinado somente ao AlfaMateca, bem como relatos das vivencias da aplicação de um minicurso sobre a plataforma destinada a educadores e gestores de instituições nacionais por meio do I congresso de Práticas Inclusivas na Educação.

2. Alfamateca e o ensino para crianças cegas

O software AlfaMateca faz uso de dois programas: o DOSVOX (sistema que se comunica com o usuário através de síntese de voz) e o JOGAVOX (ferramenta de jogos do DOSVOX) desse modo, o AlfaMateca tem o seu funcionamento através desta ferramenta de jogo JOGAVOX.

Todas as atividades do software foram desenvolvidas utilizando as vozes humanas do programa DOSVOX, com o objetivo de transfazer a experiência mais adorável para os discentes. Segundo Jessica da Silva Miranda, Luiz Cesar Martini e Felipe Antonio Moura Miranda (2018, p. 05) O sistema do DOSVOX foi desenvolvido com o objetivo de facilitar e auxiliar deficientes visuais. Assim como o software vai atender os discentes em fase de alfabetização, as atividades tem a finalidade de criar um ambiente alegre e lúdico, onde o discente poderá deparar com diversos cenários e situações que faz parte do seu dia a dia, levando-o a achar um significado nas atividades que está realizando.

Para contemplar em parte o programa de matemática do primeiro ano e deixar a experiência mais agradável para o público alvo, docentes e alunos com baixa visão ou cegueira total, o conteúdo do AlfaMateca, foi repartido em aulas, nomeadas como ÁPis+Capítulo e o numero equivalente, (por exemplo: ÁPis Capítulo 01, ÁPis Capítulo 02...). Esse glossário foi criado pensando na pratica docente com o intuito de facilitar a utilização do software, além de ser auxiliador no planejamento das aulas por parte dos docentes.

Em cada capítulo do aplicativo representa de uma a duas horas de aulas, apresentando diversos assuntos e atividades, o software e partilhado gratuitamente, o mesmo tem a limitação técnica de apenas funcionar dentro do ambiente DOSVOX, sendo o mesmo uma exigência para seu funcionamento. Os conteúdos dispostos dentro do sistema são: Vocabulários Fundamentais no capitulo 01; Números ate dez no capitulo 02; A ordem dos Números no capitulo 03; Figuras Geométricas no capitulo 04; Nosso Dinheiro no capitulo 05; Adição e Subtração no capitulo 06; Grandezas e Medidas no capitulo 07; Números Maiores do que dez no capitulo 08.

Após o docente escolher uma atividade, o discente ouvirá a voz do sistema com o texto que esta sendo apresentado na tela, e após escutar e concernir o que foi pedido, com intervenção ou não do docente, o discente digitara a resposta, em seguida o discente vai clicar na tecla “enter” e aguarda a resposta que o sistema dirá, se o resultado digitado está correto ou não, as vozes que são emitidas pelo sistema são vozes de crianças, estando à resposta correta o sistema dá os parabéns ao discente e seguirá para próxima atividade, caso a resposta estiver incorreta, o sistema diz que está incorreta e pede para o discente fazer mais uma tentativa.

3. Metodologia

O presente trabalho trata-se de uma pesquisa bibliográfica, descritiva de caráter qualitativo, realizada a partir da leitura e da aplicação do minicurso no evento citado que por meio do debate após a apresentação constatou-se que as salas de aula estão cada vez mais plurais e exigem ferramentas, tecnologias, ambientes, condições e profissionais capacitados para lidar com tais diferenças.

Assim o AlfaMateca é misto com 8 (oito) capítulos e conta com 230 (duzentos e trinta) questões pertencentes ao livro do PNLD dos anos de 2016, 2017 e 2018, dessa forma há conteúdo considerável para ser trabalhado no ambiente escolar. Em cada capitulo o aluno encontro atividades que devem ser respondidas e o mesmo só prossegue para a próxima questão caso a resposta esteja correta, sendo que em ambos os casos de estar correta ou incorreta a plataforma auxiliada pela voz de criança diz se a resposta está certa ou errada.

A apresentação do minicurso consistiu em duas etapas a primeira foi expor a situação do Brasil com relação às pessoas cegas, pois segundo o senso de 2010 cerca 18% da população sofria com algum grau de cegueira, sendo assim foi apresentado casos de escolas modelos e pioneiras no uso de metodologias e ferramentas que trabalhavam com alunos cegos ou com baixa visão em sala de aula juntamente com os demais alunos.

Importante mencionar que ao trabalhar com esses alunos em sala de aula em meio aos demais discentes faz com eles desenvolvam sua capacidade de agir em sociedade e percam o medo de sair sozinhos, de interagir e viver. Logo se torna muito importante o debate e a implementação desse sistema de ensino em todas as escolas.

O segundo momento foi destinado a apresentação da plataforma AlfaMateca, em seguida foi exposto e debatido sobre como funciona o software e como prosseguir para instala-lo e usa-lo no ambiente escolar. O mesmo pode ser usado tanto no sistema operacional Windows como nos demais sistemas.

Em seguida apresentou-se por meio de exemplos como seria uma aula de fato, perpassando por todas as etapas que um aluno vivenciaria, nesse momento fica nítido a interação da plataforma com o discente, pois a mesma diz todos os paços que o aluno deve seguir, sendo dinâmica, interativa e fácil de manusear.

4. Resultados

Com base nos estudos sobre o software AlfaMateca e suas ferramentas que contribui para o seu funcionamento, afirmamos que as tecnologias digitais no contexto educacional, nos concede o aumento das possibilidades de acarretar conhecimento, compartilha-lo e disseminar em outros espaços criador de conhecimento, as Tecnologias de Informação e Comunicação-TICs, estão muito mais presente na vida cotidiana de todos, sendo essa a razão principal da necessidade de traze-la para o contexto da educação.

Tendo em vista o que os docentes debateram no minicurso apresentado no 1° (primeiro) Congresso de Práticas Inclusivas na Educação, ao utilizar o software AlfaMateca e possível alinhar recursos tecnológicos de forma bem compreensível no contexto dos deficientes visuais, exibindo novos modelos e perspectivas para o ensino/aprendizagem dos discentes com deficiência visual no processo de alfabetização matemática.

Entretanto, com base no estudado sobre o AlfaMateca e o debate entre os docentes, afirma-se com segurança que a utilização do software em sala de aula é benéfico para os discentes cegos ou com baixa visão, pois o mesmo pode aprende de maneira lúdica e divertida, uma vez que o site conta com a interatividade e recursos tecnológicos que facilitam o entendimento do conteúdo, pois cada aluno aprende no seu ritmo.

Conforme MIRANDA, MARTINI e MIRANDA (2018, p. 03) Alfabetizar matematicamente crianças que possuem algum tipo de deficiência é uma tarefa muito complexa e sensível, uma vez que será o primeiro contato dos alunos com o mundo dos números, portanto deve ser feita de maneira calma e eficaz.

Dessa forma o uso de tecnologias que auxiliem e possa mediar o ensino torna a tarefa de alfabetizar mais simples e eficiente, pois o foco da aula deixa de ser o aluno cego ou com algum grau de cegueira e passa a ser no contexto da sala inteira, visto que nas turmas de escolas públicas há a pluralidade de discentes que precisam aprender e que necessitam de metodologias eficazes, capaz de atender a todos.

Como cita MIRANDA, MARTINI e MIRANDA (2018, p. 04) percebemos que os educadores precisam estar preparados para integrar diferentes tecnologias à sua prática pedagógica e para planejar suas ações. Conclui-se que o processo de educar vai além dos métodos usados no ensino tradicional, pressupõe metodologias voltadas para todos os alunos, bem como o uso de recursos capazes de proporcionar ao aluno a experiência dele ser o autor do seu próprio conhecimento.

Sendo assim o uso da plataforma AlfaMateca além incluir aqueles com deficiência visual na sala de aula com os demais alunos e tornar o ensino mais lúdico, divertido e prazeroso, evidência que as tecnologias são essenciais para o pleno desenvolvimento de todos, basta que os professores tenham acesso e conhecimento para usá-las a seu favor.

5. Considerações Finais

Conclui-se que o conhecimento e o uso dessa ferramenta em sala de aula beneficiam tanto os alunos com baixa visão ou cego, bem como a prática pedagógica do professor e posteriormente tanto à instituição de ensino quanto a sociedade como um todo, pois esse público não pode ser visto como deficientes, mas sim como pessoas que tem um grande potencial, basta usar os meios certos para desenvolver e potencializar tais conhecimentos.

Portanto o AlfaMateca se mostrou ser um excelente meio que pode e deve ser usado para o ensino/aprendizagem das crianças cegas, o que demanda do professor planejamento, conhecimento e metodologias que envolvam todos nesse processo, sem exclusão ou distinção, pois como os alunos são plurais, o ensino e a aprendizagem também é plural.

Podemos concluir que o ensino de crianças cegas foi na sua grande parte caracterizado pelo atendimento especializado em escolas focadas nesse público, contudo o AlfaMateca chega para descentralizar e diversificar a aquisição de conhecimentos, trazendo inovação por meio das tecnologias e tornando o ambiente escolar propício ao desenvolvimento de todos.

Logo por ser acessível e de fácil manuseio esse site é um instrumento importante e essencial que pode agregar grandes transformações tanto na vida dos alunos quanto na forma como ele pode interagir com o meio social, sendo que a plataforma estimula o aprendizado dos alunos a partir da realização das tarefas que são apresentadas como um jogo, sendo dinâmica e interativa.

Referências

IBGE-INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATISTICA. Censo demográfico. Resultados preliminares - São Paulo. Rio de Janeiro. 2010. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/94/cd_2010_religiao_deficiencia.pdf. Acesso em: 06 de out. de 2021.

BRASIL. Ministério Da Educação-MEC. A construção de conceitos e números e o pré-SOROBAN. (2020). Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/33063. Acesso em: 06 de out. de 2021.

MIRANDA, Jessica da Silva; MARTINI, Luiz Cesar; MIRANDA, Felipe Antonio Moura. **ALFAMATECA: software de alfabetização matemática para crianças deficientes visuais.** Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Rio de Janeiro. 2018. Disponível em: https://f74da757-1a8f-4ed4-a9e9-23b9355506c1.filesusr.com/ugd/86e34a_753f214691364f1d993718fe7f9e391b.pdf. Acesso em: 13 de nov. de 2021.

ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DE ZENÃO, EUDOXO E ARQUIMEDES PARA O INFINITÉSIMO ATRAVÉS DAS HISTÓRIAS EM QUADRINHOS

Lilia Santos Gonçalves [1]

Aylla Gabriela Paiva de Araújo [2]

RESUMO: Os conteúdos matemáticos apresentados nas escolas e Universidades, na maioria das vezes, não consideram que a matemática foi constituída através de pensamentos durante a evolução humana, a partir do surgimento de seus problemas, de suas experiências, dos seus comportamentos e de sua própria identidade cultural. No entanto, o que se presencia no âmbito escolar e Universitário é o ensino puramente mecânico, dissociado do contexto social e histórico. É mediante essa situação que pretendemos demostrar como a história em quadrinhos pode contribuir para a aprendizagem do infinitésimo a partir das ideias de Zenão, Eudoxo e Arquimedes. Para alcançamos nosso objetivo dividiremos o minicurso em três momentos. No primeiro momento será apresentado a parte teórica sobre as histórias em quadrinhos e em especial das tirinhas, iremos expor tirinhas sobre Zenão, Eudox e Arquimedes evidenciando algumas contribuições deles. No segundo momento, iremos propor uma atividade sobre as tiras com o tema apresentado anteriormente e daremos continuidade ensinando a manusear aplicativos e softwares para criação de tirinhas. Para finalizar o minicurso, os participantes serão convidados a criar suas próprias tirinhas ou usando aplicativos ou desenhando à mão. Através desse minicurso que terá duração de 4 horas esperamos que os participantes vejam que podemos usar tanto a História da matemática como a histórias em quadrinhos em sala com assuntos mesmo com conteúdos mais avançados e em disciplinas do ensino superior como o infinitésimo.

Palavras-chave: História da Matemática. História em Quadrinhos. Infinitésimo.

Referências

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974, p. 87.

FEIJÓ, M. Quadrinhos em Ação: Um Século de História. São Paulo: Editora Moderna, 1997

VERGUEIRO, Waldomiro. **O uso das HQs no ensino. In:** Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2010. p. 7-30.

[1] Universidade Estadual da Paraíba-UEPB, lilia.goncalves@aluno.uepb.edu.br
[2] Universidade Estadual do Rio Grande Do Norte-UERN, ayllagabriela@uern.br

VIII SEMATUDCS

SEMANA DE MATEMÁTICA DA URCA/UD
CAMPOS SALES - 2021

BOXPLOT: Da construção a uma análise quantitativa no Excel

Elainy Bezerra Vieira[1]

Raquel Costa da Silva [2]

Jeniffer J. Duarte Sanchez[3]

RESUMO: A análise de dados por meio de gráficos realizada por pessoas, mesmo nessa era onde os sistemas computacionais estão cada dia mais "inteligentes", continua a ser uma tarefa essencial nos processos decisórios. Além disso, o processo de decisão, em si, é uma tarefa primordialmente humana. O boxplot ou diagrama de caixa é uma ferramenta gráfica muito utilizada em análises estatísticas, pois permite analisar a distribuição dos dados e facilita a comparação de grupos. Existem na literatura várias fontes explicando o que é um diagrama de caixa, como ele é calculado e sua interpretação, nosso enfoque é apresentar como é feita a construção no software Excel, este software é bem conhecido entre os discentes do ensino médio e superior, de fácil manuseio, e tem implementadas diversas funções para análises estatísticas básicas. Para ilustração do processo de construção do gráfico foram considerados os dados sobre a idade em anos das crianças/adolescentes ao usarem a internet pela primeira vez. Se tiveram registros de crianças que usaram a internet com um ano de idade até aqueles que o fizeram pela primeira vez com uma idade de 17 anos.

Palavras-chave: Boxplot; Estatística; Internet; Quartis.

1. Introdução

Na análise exploratória de dados uma parte importante faz referência a análise gráfica, na maioria das vezes os gráficos são de mais fácil compreensão para o público geral, Prado e Souza (2014) ressaltam que, para se analisar uma grande quantidade de dados são necessárias técnicas que sejam capazes de resumi-los em formatos compreensíveis pelos usuários que farão posteriormente as análises para as consequentes tomadas de decisões.

Um dos gráficos mais utilizados para análise de dados é o gráfico Boxplot. Este diagrama permite visualizar a existência de possíveis dados atípicos, assim como agregar em um único desenho vários boxplots de diferentes variáveis ou grupos, vantagem que os demais modelos gráficos não compartilham. Na sua construção é necessário o conhecimento do

[1] If Sertão - PE, e-mail: elainyvieira68@gmail.com
[2] If Sertão - PE, e-mail: raquel.costa@ifsertao-pe.edu.br
[3] Universidade Federal do Ceará - CE, e-mail: jjduartes@dema.ufc.br

cálculo dos quartis, os quartis são medidas de localização que permitem dividir o conjunto de dados em quatro partes iguais.

O programa Excel faz parte do pacote Office da Microsoft, e é um dos primeiros softwares a serem ensinados para os discentes, ele permite a organização e manuseio de bancos de dados, fornece um pacote para realizar análises estatísticas básicas, tais como o cálculo da média, mediana, variância e desvio padrão, correlação, entre outros; além de criação de gráficos. A união da ferramenta gráfica diagrama de caixa e o software Excel permite aproximar os discentes ao mundo da estatística, apresentar vários conceitos básicos de forma teórica e ao mesmo tempo visualizá-los em um gráfico, o que facilita o entendimento dos mesmos.

O centro regional de estudos para o desenvolvimento da informação desenvolveu uma pesquisa sobre o uso da internet por crianças e adolescentes no Brasil no ano de 2019. Neste trabalho será considerada a idade das crianças/ adolescentes quando realizaram o primeiro uso da internet e o sexo da criança. A construção do diagrama de caixa empregando uma planilha do Microsoft Excel, nos permitiu um resumo visual rápido da variabilidade dos dados e realizar uma comparação entre dados categóricos e quantitativos (sexo e idade).

2. Objetivos

Apresentar os conceitos básicos de quartis e diagrama de caixa.

Explicar de forma básica o conceito de dados atípicos.

Construir e analisar o diagrama de caixa no software Excel

3. Metodologia

Na construção do diagrama de caixa primeiro se devem calcular a mediana Q_2 e o quartil um Q_1 e três Q_3, o quartil um ou inferior corresponde ao 25% das menores observações, a mediana divide os dados ao meio, 50% das observações são menores do que a mediana e o restante 50% é maior, o quartil 3 corresponde ao 75% das menores observações (Devore, 2006). Considere um retângulo em que estão representados a mediana e os quartis, este retângulo vai ser a caixa do diagrama de caixa.

Num segundo momento se deve calcular a amplitude interquartil que corresponde à diferença entre os quartis 3 e 1, $IQR = Q_3 - Q_1$, que será usada para o cálculo do limite inferior, $LI = Q_1 - (1,5)\,IQR$ e limite superior, $LS = Q_3 + (1,5)\,IQR$.

Da caixa formada pela mediana e os quartis segue uma linha, "bigode" até o ponto mais remoto que não exceda o limite superior. De modo similar, da parte inferior da caixa (correspondente ao primeiro quartil) segue uma linha, "bigode" até o ponto mais remoto que não seja menor do que o limite inferior. As observações que forem maiores ao limite superior ou menores que o limite inferior serão consideradas dados *outliers* ou *atípicos* (Bussab et. al., 2012), isto é, valores que estão fora do intervalo

$$Q_1 - (1,5)\,IQR \leq x \leq Q_3 + (1,5)\,IQR, \quad (1)$$

dado que este intervalo abrange aproximadamente 99% dos valores da amostra. Um outlier é um valor que foge da normalidade e que pode (e provavelmente irá) causar anomalia nos resultados obtidos por meio de algoritmos e sistemas de análise. Entender os outlier é fundamental em uma análise de dados, pois seu comportamento pode ser justamente o que está sendo procurado. Na Figura 1 é apresentado um diagrama de caixa, no qual se identificam cada uma das medidas necessárias para sua construção.

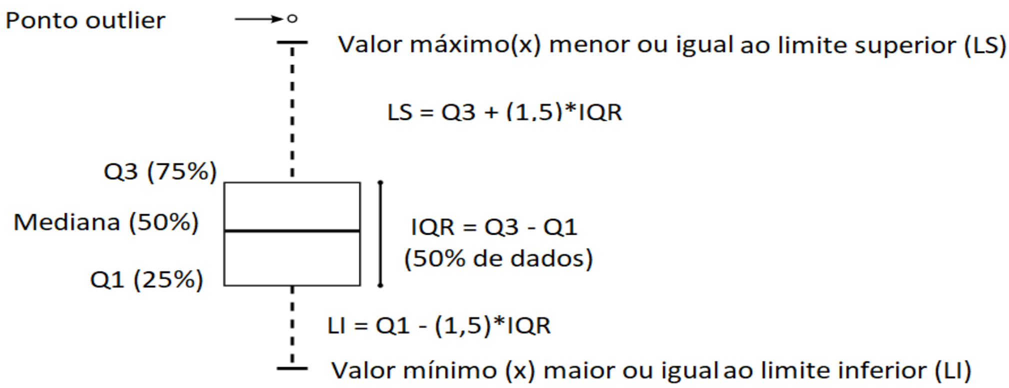


Figura 1: Diagrama de caixa ou Boxplot

4. Resultados

A base de microdados da pesquisa TIC Domicílios (cetic.br) tem como uma das suas variáveis a idade que criança/adolescente tinha quando usou a Internet pela primeira vez e o sexo da criança. Os dados foram coletados por meio de questionários estruturados, com perguntas fechadas e respostas predefinidas (respostas únicas ou múltiplas). Foram abordados 23.508 domicílios, em 349 municípios, alcançando 71% da amostra planejada de 33.210 domicílios. Nos 2.964 domicílios restantes, foram realizadas entrevistas relativas à pesquisa TIC Kids Online Brasil, que, desde 2015, acontece na mesma operação de campo, no qual trabalhamos com o ano de 2019. Para esse estudo foram desconsiderados os indivíduos que responderam: não saber, não respondeu e não se aplica, totalizando no final da amostra 780 indivíduos.

Na Figura 2 (planilha do software) são apresentados os passos para elaboração do Boxplot.

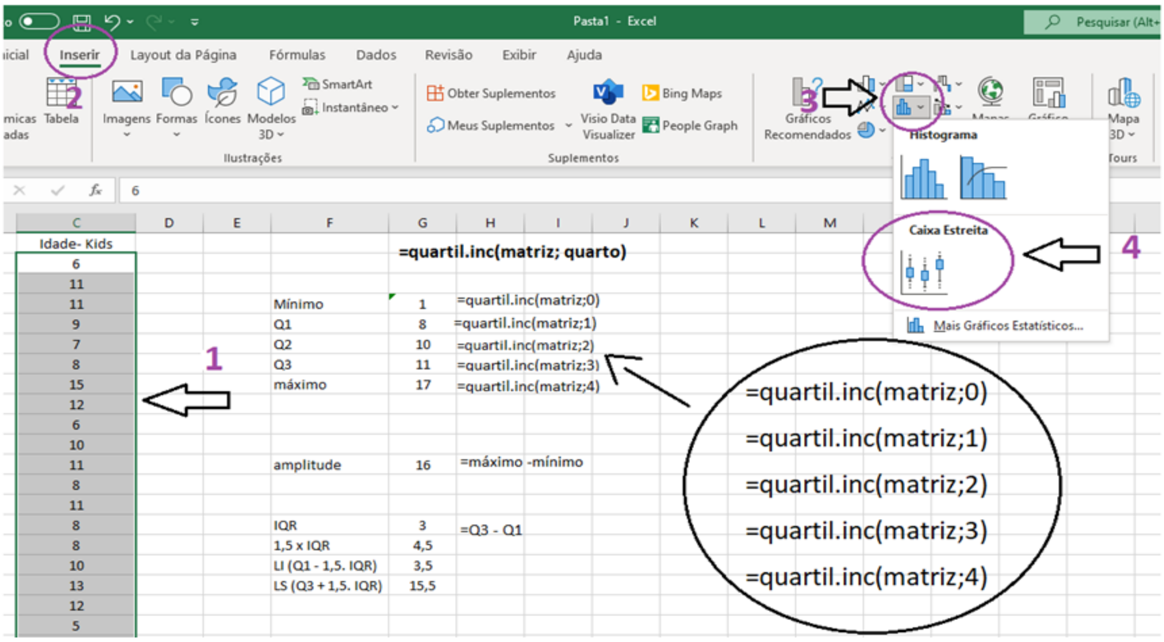


Figura 2: Passos para a construção do Boxplot no Excel versão 2110.

Os passos visualizados na Figura 2 (planilha do software) são:

1. Selecione os valores desejados. No nosso exemplo os valores selecionados foram da célula C2 até a célula C781.
2. Clique na aba "Inserir"
3. Clique no ícone que está no meio dos gráficos.

4. Selecione o gráfico caixa e caixa estreita.

Na Figura 3 é apresentado o diagrama de caixa ou Boxplot da idade das crianças/adolescentes quando usaram a internet pela primeira vez. O eixo y mostra o alcance de todos os dados. Estamos dividindo as idades em 4 grupos: 1° grupo, ¼ dos indivíduos têm idade entre 4 e 8 anos. 2° grupo, ¼ dos indivíduos têm idade entre 8 e 10 anos. 3° grupo, ¼ dos indivíduos têm idade entre 10 e 11 anos. 4° grupo, ¼ dos indivíduos têm idade entre 11 e 15 anos. Observe que o menor ponto correspondente ao mínimo dos dados da amostra é a idade de 1 ano e a maior idade é de 17 anos. A amplitude é calculada como 17 (maior observação) subtraindo 1 (menor observação), resultando em uma amplitude de 16. A idade mediana das crianças, nos diz que metade dos indivíduos no estudo usou a internet pela primeira vez quando tinha menos de 10 anos e a outra metade quando tinha mais do que 10 anos.

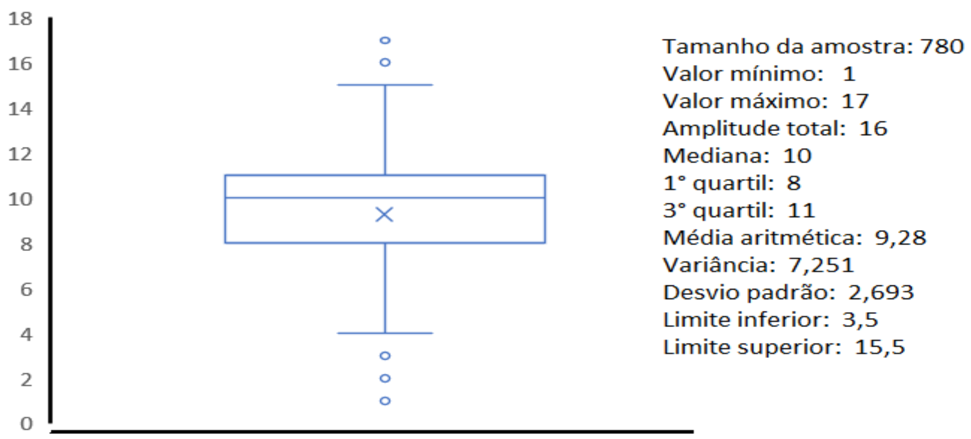


Figura 3: Boxplot da idade em que a criança/adolescente usou a internet pela primeira vez.

É fácil notar os outliers (valores atípicos) presentes na figura, estes são os dados que ficam foram da abrangência dos "bigodes" do diagrama e podem ser representados por pontos ou asteriscos no gráfico. Note que as idades, 1, 2 e 3 anos, são valores atípicos, pois estão abaixo do limite inferior e 16 e 17 também, pois estão acima do limite superior e portanto fora do intervalo (1).

Na Figura 4 se observa que a distribuição das idades é similar para ambos os gêneros, os meninos apresentaram mais dados atípicos que as meninas. Os meninos apresentaram valores atípicos correspondentes às idades de 2, 3, 16 e 17. Já para o sexo feminino se teve um valor atípico correspondente à idade de 1 ano.

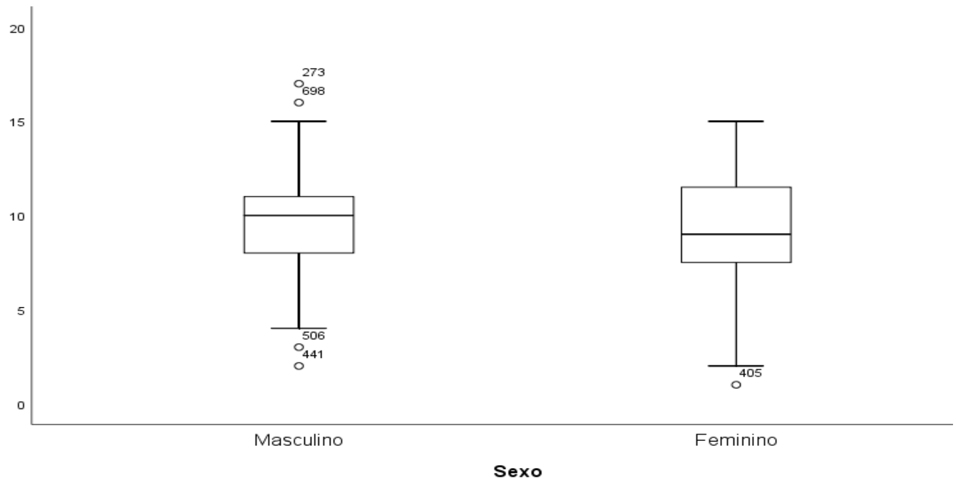


Figura 4: Boxplot da idade em que a criança/adolescente usou a internet pela primeira vez segundo o sexo.

5. Considerações Finais

Neste trabalho propôs-se a construir, analisar e discutir a importância da análise de dados, por meio do gráfico boxplot no software Excel, este software permite nos aproximar do mundo da estatística, pois o mesmo não requer que o discente tenha conhecimentos prévios de programação. Da análise dos dados da Cetic.br observa-se que a mediana da idade do primeiro contato com a internet é 10 anos. Independente do sexo, a maioria das crianças/adolescentes, cerca de 85% usaram a internet pela primeira vez entre 5 e 14 anos, 5% entre 1 a 5 anos e 10% maior que 15 anos.

Referências

Bussab, Wilton de O.; Morettin, Wilton de O. *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva, 2012.

Devore, Jay L. *Estatística e Probabilidade para Engenharia e Ciências*. [S.l.]: Cengage Learning, 2006.

Núcleo da Informação e Coordenação do Ponto BR - NIC.br. Pesquisa sobre o uso da Internet por crianças e adolescentes no Brasil: TIC Kids Online Brasil, ano 2019. Disponível em: http://cetic.br/arquivos/kidsonline/2019/pais.

Prado, Edemir P. V.; Souza, Cesar Alexandre de (Org.). *Fundamentos de Sistemas de Informação.* Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

VIII SEMATUDCS

SEMANA DE MATEMÁTICA DA URCA/UD
CAMPOS SALES - 2021

IDENTIFICANDO ALGUNS NÚMEROS IRRACIONAIS

Damião Jeferson de Araújo Souza[1]
Iza Silva Campos[2]
João Paulo de Araújo Souza[3]
Renan Fernandes de Moraes[4]
Valdinês Leite de Sousa Júnior[5]

RESUMO
Descobertos pelos gregos da Antiguidade, foi somente no século XIX que os números irracionais foram devidamente compreendidos e rigorosamente definidos, e ainda hoje nem todos os seus mistérios foram revelados. Os números irracionais foram surpreendentemente difíceis de definir. Uma definição, que a priori parece simples, mas que através da História, provou-se que esses números têm uma jornada intrigante, iniciada desde a famosa prova de Euclides de que a raiz quadrada de 2 é irracional. Foi demonstrado que o lado e a diagonal de um quadrado não podem ser medidos simultaneamente pela mesma unidade ou, dito de outra forma, que a diagonal é incomensurável com qualquer unidade que meça o lado. Ainda hoje, a identificação de tais números nem sempre é óbvia, diante disso, este trabalho visa apresentar critérios para a identificação de alguns números irracionais. Será feita uma síntese sobre os principais subconjuntos dos números reais até chegar ao conjunto dos números irracionais, onde buscaremos desvendar algumas propriedades desses números, mostrando formas de como reconhecê-los.

Palavras-chave: Números Irracionais. Aritmética. Características dos números.

1. Introdução

Os pitagóricos tiveram grande influência na história da Matemática. Eles tinham como lema que os números governavam o mundo e diziam que tudo poderia ser medido por meio de números racionais, mas quando apareceram medidas que não poderiam ser chamadas de racionais os pitagóricos, segundo o escritor Leonard em (MLODINOW, 2010, p. 37), intitularam tais medidas de *alogon*, "não racionais", que hoje chamamos de "irracionais". Por sua vez, a palavra *alogon* tinha um duplo sentido, que também significava "não deve ser falado".

A evidência destas grandezas, ditas incomensuráveis, é o aporte matemático mais importante atribuído aos pitagóricos. Cajori (2007) afirma que eles provaram que a razão entre o lado e a diagonal de um quadrado não pode ser a razão de quaisquer dois números inteiros, sendo chamados segmentos dessa espécie de incomensuráveis e de irracional a razão desses segmentos.

[1]SEDUC - Crato, e-mail: damiaojeferson22@gmail.com
[2]UNICENTER, e-mail: izacampos2013@gmail.com
[3]Instituto Federal da Paraíba, e-mail: paulo.souza@ifpb.edu.br
[4]Instituto Federal do Sertão Pernambucano, e-mail: renan.fernandes@ifsertao-pe.edu.br
[5]Universidade Federal do Cariri, e-mail: valdines.leite@ufca.edu.br

O conjunto dos números irracionais é bem intrigante, inicialmente por serem definidos a partir da diferença entre dois conjuntos que possuem uma quantidade infinita de elementos, retirando os números racionais dos números reais, e o que "sobra" são os números irracionais. Esta sobra, contém uma quantidade infinita de elementos, ainda maior do que a dos números racionais. Além disso, os irracionais estão presentes no cotidiano em diversas situações, mais do que se possa imaginar. Esse conjunto numérico não tem como ser ignorado, fazendo-se necessário a compreensão e entendimento de suas propriedades.

Neste trabalho, por meio de uma pesquisa bibliográfica explicativa, apresenta-se algumas das propriedades do conjunto dos números irracionais, além de critérios para a identificação de alguns de alguns de seus elementos.

2. Objetivos

Apresentar algumas propriedades do conjunto dos números irracionais, buscando identificar alguns elementos desse conjunto.

3. Metodologia

Este texto foi construído a partir de pesquisa bibliográfica. O professor Severino afirma em (SEVERINO, 2013) que essa categoria de pesquisa caracteriza-se a partir do registro disponível, que decorre de pesquisas já realizadas, em livros, artigos, monografias, dissertações e teses, dentre outros arquivos. Assim, os textos tornam-se fontes dos temas que serão trabalhados e pesquisados. Teve-se como base algumas propriedades dos números irracionais consideradas em (AVILA, 2006), (NIVEN, 1990) e (FIGUEIREDO, 2011), para apresentar métodos que determinam a irracionalidade de certos números reais. Além disso, como deseja-se apresentar e analisar as ideias por trás de cada princípio apresentado, temos uma pesquisa explicativa que segundo o professor Severino:

> "A pesquisa explicativa é aquela que, além de registrar e analisar os fenômenos estudados, busca identificar suas causas, seja através da aplicação do método experimental/matemático, seja através da interpretação possibilitada pelos métodos qualitativos. (SEVERINO, 2013, p. 107)".

4. Resultados

A humanidade inventou os números a partir de alguma necessidade específica. Reza a lenda que os números naturais surgiram primeiro para que pudéssemos contar objetos, sendo atualmente representados pelo símbolo

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Segundo o professor Geraldo Ávila (em (AVILA, 2006, p. 23)): "Esses números chamam-se 'naturais' justamente por surgirem 'naturalmente' em nossa experiência com o mundo físico, já nos primeiros anos da infância. Deste ponto de vista, 'zero' está longe de ser natural. Aliás, levou muito tempo para os matemáticos concederem ao zero o 'status' de número".

Orientados pela necessidade de contabilizar quantidades por símbolos, os números inteiros surgem para representar a ausência (o zero) ou a falta de algo (os números negativos), sendo constituído pelos números naturais, seus simétricos e o zero. Ou seja, o conjunto dos números inteiros é representado por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Em posse dos números naturais, podemos operar com a soma ou com a multiplicação e obter um resultado do mesmo tipo (fechado para a soma/multiplicação), mas não com a subtração. Já quanto aos números inteiros, temos um conjunto fechado para a soma, para a multiplicação e para a subtração, mas não para a divisão. Surgindo assim a necessidade de um outro conjunto que englobe todas as divisões possíveis de números inteiros por um natural. A saber, o conjunto dos números racionais (ou dos quocientes) é dado por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aqui seguimos buscando sobre o fechamento do conjunto quanto às operações básicas. Dados $m, n \in \mathbb{Q}$ temos que existem $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{N}$, tais que $m = a/b$ e $n = c/d$. Além disso, $b \cdot d \neq 0$ e

$$m \pm n = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad \pm bc}{bd} \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad m \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}.$$

Se tivermos $n \neq 0$, então devemos ter $b \cdot c \neq 0$. Com isso,

$$\frac{m}{n} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \in \mathbb{Q}.$$

Tal análise poderia aparentar que estaria completa a nossa busca pelos conjuntos dos números, mas como perceberam os pitagóricos, que defendiam que os números racionais eram suficientes para resolver qualquer problema do dia a dia, a medida da diagonal de um quadrado, cujo lado mede uma unidade de comprimento (uc), não pode ser um número racional. De fato, pelo Teorema de Pitágoras, temos que se a medida da diagonal é d uc e se os lados medem 1 uc, então teríamos

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \text{ uc}.$$

Assim, a afirmação do pitagórico é equivalente a dizer que $\sqrt{2}$ não é um número racional ou ao que aparece no teorema que segue.

Teorema 1. *Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a* 2.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existam $p, q \in \mathbb{Q}$, tais que $(p/q)^2 = 2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, existem $2, p_2, p_3, \ldots, p_n$ números primos distintos e $r_1, r_2, \ldots, r_n, s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que

$$p = \pm 2^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n} \text{ e } q = 2^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n},$$

com essa decomposição sendo única a menos da ordem de seus fatores. Assim

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2^{2r_1} p_2^{2r_2} \cdots p_n^{2r_n} = 2^{2s_1+1} p_2^{2s_2} \cdots p_n^{2s_n}.$$

Como o número $2r_1$ é par e o número $2s_1 + 1$ é ímpar, não podem ser iguais. Contradizendo a unicidade da decomposição de um número inteiro. Portanto, não existe tal número racional cujo quadrado seja igual a dois. ■

Com o que foi apresentado, e conhecendo o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), pode-se constatar que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mas não se tem $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ou seja $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. A esse conjunto, que contém o $\sqrt{2}$, chamamos de conjuntos dos números irracionais e representamos por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Diferente do que acontece com os números racionais, não podemos afirmar que a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão de números irracionais também sejam números irracionais.

Pois, de modo análogo ao que aconteceu com a $\sqrt{2}$, pode-se mostrar que $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Com isso, $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}, \ \ \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q} \text{ e } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Para provar a validade de uma proposição, é necessário uma demonstração matemática. Por outro lado, para mostrar a não validade, basta apresentar um contraexemplo e foi isso que fizemos.

Agora, de maneira análoga ao que foi feito para mostrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, pode-se mostrar que $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3}$ também são irracionais. Com isso, podemos apresentar um outro exemplo de número irracional, que é soma de dois números irracionais.

Exemplo 1. *O número $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional. De fato, se r fosse um número racional, teríamos que r^2 também o seria. Com isso,*

$$\mathbb{Q} \ni r^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Logo, teríamos $\sqrt{6} = (r^2 - 5)/2 \in \mathbb{Q}$, pois, por hipótese, $r^2 \in \mathbb{Q}$ e assim $2, r^2 - 5 \in \mathbb{Q}$ e, como a divisão de dois números racionais é um número racional (desde que o denominador seja diferente de zero, que é o caso), chegaríamos ao absurdo de $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, que sabemos não ser verdade. Assim, a única possibilidade é que se tenha $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Desse modo, podemos concluir que a soma de dois números irracionais podem ser ou não um número irracional.

O resultado obtido no exemplo pode ser generalizado pelo teorema a seguir. Vejamos.

Teorema 2. *Sejam x, y números irracionais, tais que $x^2 - y^2$ é um número racional não-nulo. Então, $x + y$ e $x - y$ são ambos irracionais.*

Demonstração. Devemos ter em mente que $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ e que a soma, a subtração e a divisão de dois números racionais são números racionais. Supondo, por absurdo, que $x + y$ seja um número racional, então $x - y = (x^2 - y^2)/(x + y)$ também seria um número racional por ser a divisão de números racionais, em que o denominador é diferente de zero (pois, caso contrário teríamos $x^2 - y^2 = 0 \cdot (x - y) = 0$ o que contraria a hipótese). Assim,

$$x = \frac{(x + y) + (x - y)}{2}$$

seria um número racional, por ser a divisão de dois números racionais. Um absurdo, pois contraría a hipótese de $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Outro caso seria supor que $x - y \in \mathbb{Q}$ e, de modo análogo, teríamos $x \in \mathbb{Q}$, um absurdo novamente. Restando apenas a possibilidade de $x + y$ e $x - y$ serem irracionais. ■

Com o Teorema 2 em mãos e com a noção de que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais e que

$$(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1 \in \mathbb{Q},$$

temos que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (como já mostramos) e $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ são irracionais.

Um outro fato interessante a ser investigado diz respeito às potências de números irracionais. Por exemplo, o que podemos afirmar sobre o número a^b, em que a e b são números irracionais?

Exemplo 2. *Existe um número irracional que elevado a outro número irracional terá como resultado um número racional. Ora, considerando o número $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, se A for um número* *racional, nada teremos a mostrar. Por outro lado, se A for um número irracional, podemos tomar o número*

$$C = A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}.$$

O que comprova a afirmação do exemplo.

Esse exemplo é interessante pelo fato de não sabermos nada sobre a natureza de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Quanto ao caso de termos um número irracional elevado a outro número irracional resultando em um número irracional, deixamos como sugestão de exercício para os leitores.

O próximo teorema versa basicamente sobre os números racionais e as raízes de certos polinômios, mas, com a devida manipulação, podemos torná-lo um excelente ferramenta para ser usada na busca de números irracionais.

Teorema 3. *Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de coeficiente inteiros. Seja $\beta \in \mathbb{Q}$, $\beta \neq 0$, uma raiz de $f(x)$. Escrevendo $\beta = r/s$, com $r, s \in (\mathbb{Z} - \{0\})$ e $\mathrm{mdc}(r,\, s) = 1$, então r divide a_0 e s divide a_n.*

A demonstração do Teorema 3 pode ser encontrada em (HEFEZ; VILLELA, 2016, p. 155).

Observe que o polinômio $f(x) = x^n - p$, com $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e p um número primo, tem como possibilidade para uma raiz racional o número da forma $\beta = r/s$, em que r divide $a_0 = p$ e s divide $a_n = 1$, ou seja, $r = \pm 1$ ou $r = \pm p$ e $\beta = \pm 1$ ou $\beta = \pm p$. Testando as possibilidades, temos que,

(i) se n for par, então

$$0 = f(\beta) = (\pm 1)^n - p = 1 - p \quad \text{ou} \quad 0 = f(\beta) = (\pm p)^n - p = p(p^{n-1} - 1).$$

Na primeira igualdade, teríamos $p = 1$, contrariando a primalidade de p. A segunda igualdade implica que $p(p^{n-1} - 1) = 0$, uma vez que $n > 1$. Dessa forma, $p = 0$ ou $p = 1$. Novamente uma contradição. Logo, se n for par, $f(x)$ não pode ter raízes racionais.

(ii) se n for ímpar, então

$$0 = f(\beta) = (\pm 1)^n - p = -1 - p \quad \text{ou} \quad 0 = f(\beta) = (\pm p)^n - p = -p(p^{n-1} + 1).$$

A veracidade da primeira igualdade implicaria que $p = -1$, o que é impossível, uma vez que p é primo. Para a segunda, teríamos $-p(p^{n-1} + 1) = 0$. Isso acarretaria em $p = 0$ ou $p^{n-1} = -1$. Em ambos os casos teríamos um absurdo, pois como $n - 1$ é par e p é um número primo. Logo, se n for ímpar, $f(x)$ não pode ter raízes racionais.

Concluímos, assim, que o polinômio $f(x) = x^n - p$, com $n \in \mathbb{N}$ e p um número primo, não possui raízes racionais. Por outro lado, sabemos que o número real $\alpha = \sqrt[n]{p}$ é uma raiz de $f(x)$. Pois,

$$f(\alpha) = \alpha^n - p = (\sqrt[n]{p})^n - p = p - p = 0.$$

Restando apenas a possibilidade de $\sqrt[n]{p}$ ser um número irracional. De sorte que, agora, para gerar números irracionais, basta variar o n no conjunto dos números naturais ou o p no conjunto dos números primos. Vale salientar o fato de que os dois conjuntos possuem uma quantidade infinita de elementos.

Exemplo 3. *Dado $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, os números*

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{2},\ \sqrt[5]{2},\ \ldots,\ \sqrt[n]{2},$$

são sempre irracionais.

5. Considerações Finais

No início do trabalho, propusemo-nos a apresentar formas de como identificar alguns números irracionais. Na tentativa de alcançar tal objetivo, foi feita uma breve introdução sobre os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, destacando conceitos cruciais para chegar às propriedades desejadas para tal.

Apresentados os conceitos, mostrou-se a existência de um número que não pode ser racional, como um primeiro exemplo dos números irracionais, a saber, a diagonal de um de um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Observou-se que o conjunto dos números irracionais não é fechado para as operações básicas. Além disso, uma maneira de encontrar uma infinidade de números irracionais foi apresentada.

Deixamos como sugestão de pesquisa demonstrar que os números e (constante de Euler) e π (razão entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro) são irracionais. Para isso, recomendamos o livro (FIGUEIREDO, 2011), onde fortes resultados sobre números transcendentes podem ser encontrados, podendo ser uma continuação de pesquisa.

Referências

AVILA, G. S. de S. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3a. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

CAJORI, F. **Uma história da Matemática**. 3a. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3a. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. 1a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MLODINOW, L. **A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço**. Traduzido por Enézio E. de Almeida Filho. 3a. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Traduzido por Renate Watanabe. 3a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico [livro eletrônico]**. 1a. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

VIII SEMATUDCS

SEMANA DE MATEMÁTICA DA URCA/UD
CAMPOS SALES - 2021

NÚMEROS IRRACIONAIS E TRIGONOMETRIA

Damião Jeferson de Araújo Souza[1]
Iza Silva Campos[2]
João Paulo de Araújo Souza[3]
Renan Fernandes de Moraes[4]
Valdinês Leite de Sousa Júnior[5]

RESUMO
Este trabalho é proposto como uma continuidade ao texto de título “Identificando Alguns Números Irracionais” que também foi proposto na VIII SEMATUDCS. Retornaremos aos números irracionais com o intuito de apresentar algumas relações entre a Geometria Euclidiana Plana, em especial a Trigonometria, e tais números. Retorna ao Teorema das Raízes Racionais com a justificativa da irracionalidade de $\cos(20°)$ e apresenta um teorema importante que relaciona a irracionalidade de um cosseno do arco duplo com a irracionalidade do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo. Com a junção desses dois resultados, é possível justificar a irracionalidade de uma quantidade infinita de valores dessas três funções trigonométricas básicas. Vale citar que em nenhum momento do texto apresentamos o valor de qualquer número irracional, mas isso nada influencia na determinação do tipo de cada número, pois a proposta é apresentar resultados gerais e não casos particulares. Para tal apresentação é utilizada uma metodologia de pesquisa dita bibliográfica.
Palavras-chave: Números Irracionais. Trigonometria. Características dos números.

1. Introdução

A teoria dos números irracionais é bem ampla e está relacionada com diversas áreas da matemática. Com isso em mente, este trabalho busca apresentar uma continuação às propriedades apresentadas no texto de título “Identificando Alguns Números Irracionais” que também foi proposto na VIII SEMATUDCS.

Para isso, buscamos relacionar os números irracionais com alguns resultados da Geometria Euclidiana Plana, em especial a Trigonometria. O leitor poderá identificar que resultados fortes podem ser apresentados de forma simples. Além disso, alguns resultados possuem um fácil entendimento, onde podemos encontrar relações entre conteúdos que aparentemente são bem distintos e desconexos.

Neste texto, retornaremos inicialmente aos números racionais e sua propriedade do fechamento para as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão). Além disso, utilizaremos o Teorema das Raízes Racionais para polinômios com coeficientes inteiros.

[1]SEDUC - Crato, e-mail: damiaojeferson22@gmail.com
[2]UNICENTER, e-mail: izacampos2013@gmail.com
[3]Instituto Federal da Paraíba, e-mail: paulo.souza@ifpb.edu.br
[4]Instituto Federal do Sertão Pernambucano, e-mail: renan.fernandes@ifsertao-pe.edu.br
[5]Universidade Federal do Cariri, e-mail: valdines.leite@ufca.edu.br

Quanto aos números irracionais, enunciaremos uma propriedade semelhante à do fechamento para números racionais, mas agora os números que serão operados devem ser um racional e um irracional. É justificada a irracionalidade de $\cos(20°)$ e é demonstrada uma relação entre a irracionalidade de algumas imagens da função $\cos(2x)$ e as irracionalidades das respectivas imagens dadas pelas funções trigonométricas $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\tan x$.

Para alcançar tal objetivo, fizemos uso de uma metodologia de pesquisa dita bibliográfica e explicativa, pois realizamos pesquisas em alguns materiais, como livros, artigos e monografias, e tentamos apresentar os resultados obtidos de uma maneira simples e concisa.

2. Objetivos

Apresentar algumas propriedades do conjunto dos números irracionais, buscando identificar alguns elementos desse conjunto que estão relacionados com alguns resultados embasados nas propriedades da Geometria Euclidiana, em especial na Trigonometria.

3. Metodologia

Este texto foi idealizado a partir de pesquisa bibliográfica. O professor Severino afirma em (SEVERINO, 2013) que essa categoria de pesquisa caracteriza-se a partir do registro disponível, que decorre de pesquisas já realizadas, em livros, artigos, monografias, dissertações e teses, dentre outros arquivos. Assim, os textos tornam-se fontes dos temas que serão trabalhados e pesquisados. Teve-se como base algumas propriedades dos números irracionais consideradas em (AVILA, 2006), (NIVEN, 1990) e (KAPLAN, 1972), para apresentar métodos que determinam a irracionalidade de certos números reais. Além disso, como deseja-se apresentar e analisar as ideias por trás de cada princípio apresentado, temos uma pesquisa explicativa que segundo o professor Severino:

> "A pesquisa explicativa é aquela que, além de registrar e analisar os fenômenos estudados, busca identificar suas causas, seja através da aplicação do método experimental/matemático, seja através da interpretação possibilitada pelos métodos qualitativos. (SEVERINO, 2013, p. 107)".

Para as propriedades trigonométricas, foi utilizado como referência o livro (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) que pode ser consultado para maiores esclarecimentos sobre tal conteúdo.

4. Resultados

Para começar, consideraremos que o conjunto dos números naturais não contém o número zero. Além disso, deve-se ter em mente a definição do conjunto dos números racionais, representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$, sendo ele um conjunto fechado para as quatro operações básicas. Também faremos uso de algumas propriedades relativas às funções trigonométricas básicas, que não enunciaremos previamente.

Definição 1. *O conjunto dos números racionais (ou dos quocientes) é dado por*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Quando operamos dois números racionais por qualquer uma das quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) obtemos como resultado um número racional. Pois, dados $m, n \in \mathbb{Q}$ temos que existem $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{N}$, tais que $m = a/b$ e $n = c/d$. Teremos que, $b \cdot d \neq 0$ e

$$m \pm n = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad \pm bc}{bd} \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad m \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}.$$

Se tivermos $n \neq 0$, então devemos ter $b \cdot c \neq 0$. Com isso,

$$\frac{m}{n} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \in \mathbb{Q}.$$

Tendo em mente o teorema das raízes racionais de um polinômio de coeficientes inteiros e a relação

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

apresentaremos nosso primeiro exemplo.

Exemplo 1. *Sem precisar determinar o valor de* $\cos(20°)$*, podemos afirmar que tal número é irracional. Com efeito, tomando* $\cos(20°) = x$*, temos que* $\cos(3x) = 1/2$ *e, assim,*

$$\cos(3 \cdot 20°) = 4\cos^3(20°) - 3\cos(20°) \Rightarrow \frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \Rightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Ou seja, se $x = \cos 20°$ *é racional, então a equação* $8x^3 - 6x - 1 = 0$ *tem uma raiz racional. Por outro lado, pela o teorema das raízes racionais, as possíveis raízes racionais da equação são* $\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$ *e* $\pm 1/8$*. Com um teste simples (por substituição), temos que nenhuma dessas possibilidades é raiz da equação dada. Portanto, a raiz* $x = \cos 20°$ *de* $8x^3 - 6x - 1 = 0$ *não pode ser racional.*

Proposição 1. *Sejam* m *um número irracional e* q *um número racional. Então,* $q \pm m, q \cdot m$ *e* $1/m$ *são números irracionais.*

A proposição acima afirma que quando operamos um número racional com um número irracional, pelas quatro operações básicas, temos um número irracional, onde a divisão é simplesmente a multiplicação de um número pelo inverso de outro.

Deixamos a demonstração da Proposição 1 omitida, para que o leitor interessado possa demonstrá-la por conta própria, deixando aqui a sugestão de utilizar a técnica de demonstração por redução ao absurdo.

Teorema 1. *Se* $\cos 2x$ *é um número irracional, então* $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ *e* $\tan x$ *são números irracionais.*

Demonstração. Assumindo a irracionalidade de $\cos 2x$, iremos dividir a demonstração em três partes.

(i) se fosse $\cos x$ um número racional, teríamos que $\cos^2 x$ seria um número racional e, por consequência, $\cos(2x) = \cos^2 x - 1$ também seria um número racional, o que contradiz a hipótese. Portanto, a única possibilidade é que $\cos x$ seja um número irracional.

(ii) se fosse $\operatorname{sen} x$ um número racional, teríamos que $\operatorname{sen}^2 x$ seria um número racional e, por consequência, $\cos^2 x$ seria irracional. De modo análogo ao que foi apresentado no item (i), $\cos(2x)$ seria um número racional e isso contradiz a hipótese. Portanto, $\operatorname{sen} x$ é um número irracional.

(iii) se fosse $\tan x$ um número racional, teríamos que $\tan^2 x$ seria uma números racional e, assim, $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ séria um número racional. Por outro lado, como

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

teríamos que $\cos^2 x$ seria um número racional, e isso implicaria que $\cos 2x$ é um número racional, contrariando a hipótese. Por fim, nos resta que $\tan x$ também deve ser um número irracional.

■

O Teorema 1, junto ao fato de sabermos que $\cos(20°)$ ser um número irracional, nos dá uma infinidade de números irracionais que são imagem das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente. Por exemplo, sabemos que $\cos(20°) = \cos(2 \cdot 10°)$ é um número irracional, então, pelo Teorema 1, temos que $\cos(10°)$, $\operatorname{sen}(10°)$ e $\tan(10°)$ são todos números irracionais. Em particular, obtemos que $\cos(10°)$ é um número irracional, e poderíamos seguir nesse raciocínio para mostrar que $\cos x_n$ é irracional sempre que x_n for dado pela recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 20°; \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2}, \ \forall n > 1. \end{cases}$$

Por fim, apresentamos um resultado que envolve Trigonometria, Geometria Plano e números racionais (uma forma de atingir os números irracionais de maneira indireta).

Teorema 2. *O cosseno de qualquer ângulo interno de um triângulo, cujos lados têm como medida um número racional, não pode ser um número irracional.*

Demonstração. Assumindo o triângulo ABC, de lado medido $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ e ângulos internos cujas medidas são $A\hat{B}C = \hat{B}$, $A\hat{C}B = \hat{C}$ e $B\hat{A}C = \hat{A}$ temos que, por hipótese, a, b e c são números racionais. Pela Lei dos Cossenos, temos que

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \ \text{ e } \ \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

■

Como as expressões de $\cos \hat{A}$, $\cos \hat{B}$ e $\cos \hat{C}$ são compostas apenas por operações básicas (elevar ao quadrado pode ser visto como uma multiplicação) de números racionais, o resultado não pode ser um número irracional, uma vez que o conjunto dos números racionais é fechado para as quatro operações básicas.

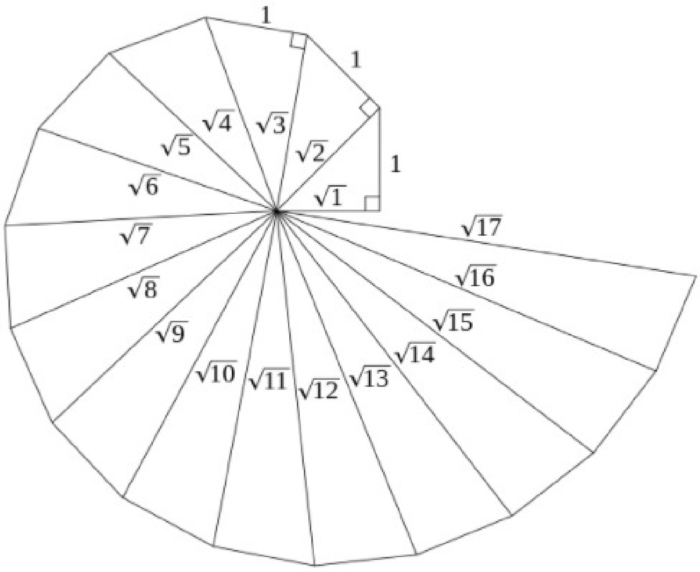
A título de curiosidade, exemplificação e aplicação, apresentamos a Espiral de Teodoro, que apresenta a construção geométrica das raízes quadradas de qualquer número natural. A construção dessa espiral consiste em considerar sucessivos triângulos retângulos cujos catetos medem uma unidade de medida e o outro coincide com a hipotenusa do triângulo retângulo anterior. Por exemplo, o primeiro tem lados medindo 1 uc, 1 uc e $\sqrt{2}$ uc. Os catetos do segudo mediram 1 uc e $\sqrt{2}$, com isso, a hipotenusa medirá

$$h_2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3},$$

e assim sucessivamente.

Sabemos que a raiz quadrada de qualquer número primo é um número irracional, mais ainda pode ser provado quanto a irracionalidade de qualquer número que não seja um quadrado perfeito. Assim, tirando os número $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ e $\sqrt{16}$, todos os outros números apresentados na espiral da Figura 1 são números irracionais.

Figura 1: Espiral de Teodoro



Fonte: (WIKIPEDIA, 2021)

Caso deseje utilizar essa espiral em uma aula utilizando o programa GeoGebra, pode-se acessar o site (GONÇALVES, 2021), onde encontraram uma construção animada pronta. Podendo fazer a animação no site ou diversificar a construção a partir do arquivo .ggb que o autor disponibiliza no site supracitado.

5. Considerações Finais

No início do trabalho, propusemo-nos a justificar a irracionalidade de $\cos(20°)$ mostrando que tal número é raiz de um equação polinomial que, pelo Teorema das Raízes Racionais, não possui raízes racionais, o que acarreta o resultado desejado. Além disso, tal irracionalidade foi crucial para garantir a irracionalidade de uma infinidade de valores obtidos por meio das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, mas, para isso, fez-se necessário um teorema que relacionou, quanto a irracionalidade, tais funções com o cosseno do arco duplo.

Como exemplo de uma aplicação mais direta e visual, apresentamos a Espiral de Teodoro, que consiste na construção da raiz quadrada de qualquer número inteiro que se deseje. É verdade que para números "grandes" não é tão eficaz, mas para uma breve apresentação serve adequadamente.

A importância dos números irracionais poderia ser considerada pela densidade desses elementos na matemática em geral, mas, nesses dois textos[6], tentamos mostrar aos leitores que esses números são interessantes e, a partir de propriedades elementares, podemos chegar a resultados gerais sobre toda uma classe de números.

Como proposta de pesquisa, sugere-se a demonstração de que os números e (constante de Euler) e π (razão entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro) são irracionais. Além disso, recomendamos um estudo que aborda a divisão dos números reais como números algébricos e números transcendentes. Como principais referências, indicamos os livros (FIGUEIREDO, 2011) e (NIVEN, 1990), onde serão encontrados fortes resultados sobre essa teoria, podendo qualquer uma das duas sugestões ser uma continuação dessa pesquisa.

[6] "Identificando Alguns Números Irracionais" e "Números Irracionais e Trigonometria"

Referências

AVILA, G. S. de S. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3a. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria e Números Complexos**. 3a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3a. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.

GONÇALVES, W. V. **Espiral Pitagórica.** ⟨https://www.geogebra.org/m/rduacrtg⟩. Acessado em 03 de dez. de 2021. 2021.

KAPLAN, W. **Cálculo Avançado**. Traduzido por Frederic Tsu. 1a. ed. São Paulo: Blucher, 1972.

NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Traduzido por Renate Watanabe. 3a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico [livro eletrônico]**. 1a. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

WIKIPEDIA. **Espiral de Teodoro.** ⟨https://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Teodoro⟩. Acessado em 03 de dez. de 2021. 2021.

O conjunto dos números racionais e algumas sutilezas

Ozana da Silva Alencar [1]

Nayara Alves da Silva [2]

RESUMO: Como parte do desenvolvimento do projeto “Obstáculos didáticos e erros no processo de ensino aprendizagem de números racionais” temos pesquisado sobre como o ensino dos números racionais vem sendo abordado na Educação Básica. Durante os dois anos de desenvolvimento desse projeto já foram realizadas diversas atividades tais como visita a escolas, aplicação de questionários para professores e alunos, revisões bibliográficas, produção de artigos científicos, dentre outras. No decorrer desse processo, notamos que muitos professores limitam seus recursos didáticos e suas fontes de pesquisa ao livro didático. Isso, sem dúvidas, compromete significativamente a qualidade do ensino, pois o livro didático é um material de apoio produzido de acordo com o nível de conhecimento do aluno, ao professor cabe estar muito além desse nível. Na etapa mais recente deste projeto, buscamos produzir materiais de apoio para esses docentes, para que conhecendo o conjunto dos números racionais e suas sutilezas, tenham o embasamento teórico necessário para ministrar suas aulas. Para se ter uma ideia, no nosso último trabalho, mostramos que até na definição do conjunto dos números racionais, dada por muitos professores, há erro. Nesse minicurso objetivamos através de um diálogo entre orientadora, bolsista e ouvintes, compartilhar e discutir esta pesquisa, suas concepções, resultados, desafios, avanços, enfim, apresentar o nosso estudo como meio de divulgação científica e incentivo à pesquisa. Desejamos que este minicurso contribua para o aprimoramento da prática docente dos professores de matemática no que diz respeito ao ensino dos números racionais.

Palavras-chave: Números racionais. Ensino-aprendizagem. Professor de matemática. Pesquisa.

Referências

GOMES, V. K. I.; FELIX, I. A.; SILVA, C. B. S. F. **O uso de objetos de aprendizagem no ensino das frações.** V CONEDU, 2018.

NASCIMENTO, J. do. Perspectivas para a aprendizagem e ensino dos números racionais. **Revista de iniciação cientifica da FFC**, v. 8, n. 2, p. 196 – 208, 2008.

[1] Universidade Regional do Cariri, e-mail: ozana.alencar@urca.br
[2] Universidade Regional do Cariri, e-mail: nayara.alves@urca.br

NIVEN, I. **Números:** racionais e irracionais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

Duração: duas horas.

Material: Não será necessário que o ouvinte disponibilize de nenhum material para acompanhar o minicurso.

O ENSINO DO XADREZ E SUAS CONTRIBUIÇÕES NA APRENDIZAGEM

Jeferson da Silva Gomes [1]

Osmar Bernardes da Silva[2]

Cicefran Souza de Carvalho [3]

RESUMO: Ao propor esse minicurso pretendemos trabalhar e desenvolver o uso do jogo de xadrez nas turmas de ensino fundamental, buscando através do jogo, fazer com que os estudantes desenvolvam habilidades como maior concentração, memória, inteligência, imaginação entre outras vantagens. Além desses benefícios que o jogo pode trazer, visamos também trabalha-lo como uma forma de inclusão, tanto para aqueles estudantes que são mais tímidos quanto para aqueles que possuam algum transtorno como por exemplo TDAH, sendo assim o jogo de xadrez também poderá ser utilizado com objetivo de amenizar essas dificuldades, possibilitando então uma melhora no aprendizado. O minicurso é realizado em quatro etapas que são as seguintes: 1° etapa: Apresentar o jogo de xadrez juntamente com suas regras e objetivos, explicação sobre os fundamentos práticos e teóricos do jogo, tais como: movimento das peças (Peão, bispo, cavalo, torre, rainha e rei), movimentos especiais, casos de empates. Na 2° Etapa: "O jogo de xadrez e o ensino de matemática", faremos considerações sobre o ensino de matemática e as contribuições que o xadrez traz para essa disciplina. Na 3° Etapa: Demonstrar como podemos trabalhar o xadrez com alunos que tenham problemas de interação com os colegas, timidez ou TDAH e deficiência intelectual, buscando aumentar o seu desenvolvimento cognitivo através da prática do jogo. Na 4° Etapa: Utilizar o xadrez também com uma forma de inclusão social, fazendo com que os alunos da turma joguem entre eles, e assim fazer com que aquele momento não seja só um jogo, mas sim uma forma de interação entre os colegas. O Jogo de xadrez vem sendo utilizado nas escolas como instrumento de Inter, multi e pluridisciplinar, tendo em vista que ele auxilia significamente na ampliação do pensamento cognitivo, memorização e raciocínio lógico, além de contribuir para o desenvolvimento intelectual, moral e ético da personalidade do aluno. Daí levantou-se então a ideia de trabalhar o xadrez, visando melhorar o seu desempenho e contribuir também para que haja uma interação melhor com seus colegas de sala. Além das contribuições na área educacional, o xadrez também influencia no comportamento daqueles que o jogam, pois com um bom tempo de prática a pessoa passa a utilizar a paciência, atenção, calma e estratégia diante das situações do dia a dia, buscando meio diferentes para a resolução de problemas e opções mais viáveis em determinadas ações. O jogo de xadrez não só contribui na fase educacional do estudante, mas também contribuirá muito na sua formação com ser humano.

Palavras-chave: xadrez.ludico.inclusivo.matematica

[1] Universidade Regional do Cariri (URCA), e-mail: jeferson.silva08.jsg@gmail.com
[2] Universidade Regional do Cariri (URCA), e-mail: osmar.bernardes@urca.br
[3] Universidade Regional do Cariri (URCA), e-mail: cicefran.carvalho@urca.br

Referências

ALMEIDA, J.W. de Q. **O jogo de Xadrez na Educação Matemática**: como e onde no ambiente escolar. 2010. 156 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande-PB, 2010.

Carvalho, Dalva Maria Seewald de. **Eficácia do xadrez para o aluno com deficiência intelectual na aprendizagem escolar.** Disponível em: https://bdm.unb.br/bitstream/10483/4210/1/2012_DalvaMariaSeewalddeCarvalho.pdf

FREITAS, Wanda L. de; PERES, Luís S. **O xadrez como meio de sociabilização e desenvolvimento Intelectual.** http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/874-4.pdf

MUNIC, Ligia. **O xadrez aplicado à educação especial**, Disponível em: http://www.compuland.com.br/cxp/educespc.htm

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: Uma aplicação na agricultura.

Antonia Nara de Alencar [1]

Sabrina Bento Pereira [2]

José Augusto Pereira Nogueira [3]

RESUMO: A matemática é uma das ciências mais fascinantes da história, e surgiu juntamente com as necessidades do ser humano. Um dos ramos mais importantes da área é o Cálculo Diferencial e Integral criado de forma independente através dos estudos de Newton e Leibniz, dois cientistas extremante importantes para o desenvolvimento dessa ciência, que com suas definições e métodos apresentam resultados satisfatórios e coerentes. Além do mais a matemática que antes era definida como pura e acabada vem se mostrando prática e aplicável nos diversos campos das ciências. Esse trabalho de cunho bibliográfico tem por objetivo apresentar definições de máximos e mínimos relativos e absolutos, o teste da segunda derivada e alguns problemas de otimização voltados para a agricultura, como a maximização de produção em determinada plantação e a descoberta das medidas para aproveitar determinada área, mostrando a importância da matemática para resolver problemas do cotidiano, levando em consideração os aspectos que envolvem a situação, serve também de apoio para estudos futuros.

Palavras-chave: Agricultura. Cálculo. Otimização.

1. Introdução

A matemática surgiu junto com a humanidade pois desde sempre existiram necessidades a serem supridas como medir e contar, é uma ciência que está em constante transformação e não pura e acabada como se costumava pensar.

Atualmente um dos ramos mais importantes da área é o Cálculo Diferencial e Integral desenvolvido por dois grandes importantes estudiosos das ciências: Leibniz e Newton. O Cálculo, aborda conceito de Limites, Derivadas e Integrais que podem ser utilizados na descoberta de volumes, áreas e também problemas de otimização (máximos e mínimos).

Neste trabalho focaremos na utilização dos problemas de otimização na agricultura, o que comumente não são apresentados, tendo em vista que vem se tornando uma importante

[1] Universidade Regional do Cariri, e-mail: antonia.nara@urca.br
[2] Universidade Regional do Cariri, e-mail: sabrina.bento@urca.br
[3] Universidade Regional do Cariri, e-mail: augusto.nogueira@urca.br

ferramenta com grande aplicabilidade nas diversas áreas pois apresenta resultados eficientes considerando os aspectos nos quais os problemas são desenvolvidos.

2. Objetivos

Temos por objetivo mostrar uma aplicação das derivadas através de problemas de otimização. Mais especificamente, daremos exemplos de situações que podemos encontrar na agricultura como o cálculo de áreas para melhor aproveitamento da terra ou situações que colaborem para a maximização da produtividade. Além disso, apresenta a importância da matemática nos diversos campos do estudo humano e que são essenciais para a nossa sobrevivência.

3. Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho foram necessárias pesquisas sobre o assunto em diversos sites, livros e artigos, ou seja, é uma pesquisa de cunho bibliográfico. Conceitos como a Derivada de uma função real, pontos de máximos e mínimos foram imprescindíveis para compor a organização do mesmo, vale ressaltar que os problemas de otimização auxiliam na apresentação da aplicabilidade do assunto retratado.

A seguir veremos as definições e conceitos necessários para os estudos de máximos e mínimos, os quais foram retirados de LEITHOLD, 1994.

Definição 1 (Ponto crítico). Se c for um número no domínio da função f e $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir então c será chamado de número crítico

Definição 2 (Extremos relativos ou locais).

(i) A função f terá um valor máximo relativo em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x nesse intervalo.

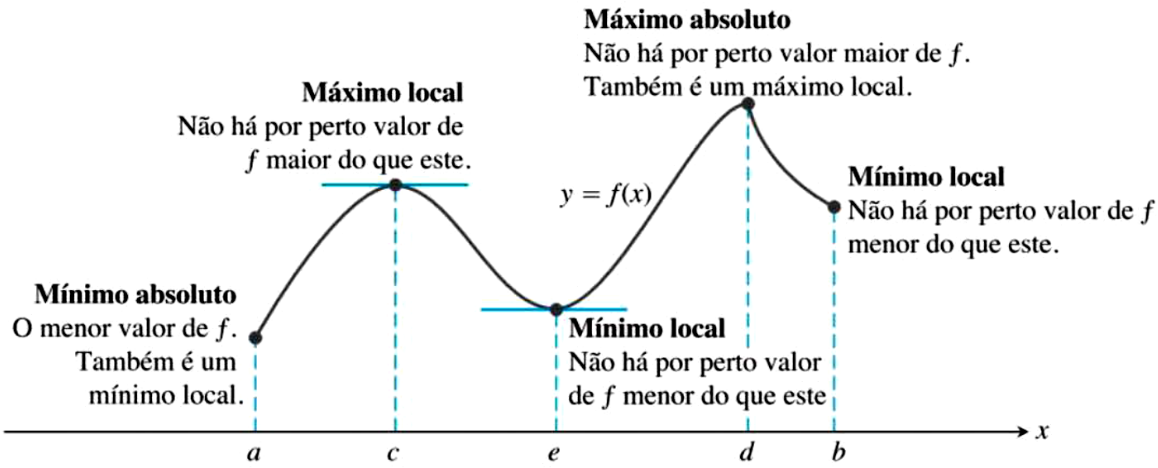
(ii) A função f terá um valor minimo relativo em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x nesse intervalo.

Definição 3 (Extremos absolutos ou globais).

(i) A função f terá um valor máximo absoluto num intervalo, se existir algum número c num intervalo, tal que $f(c) \geq f(x)$para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

(ii) A função f terá um valor minimo absoluto num intervalo, se existir algum número c num intervalo, tal que $f(c) \leq f(x)$para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$será o valor minimo absoluto de f no intervalo.

Figura 1: Máximos e mínimos relativos e absolutos



Fonte: (THOMAS, p. 214)

Teorema 1 (Teste da segunda derivada). Seja c um número crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e suponhamos quef' exista para todos os valores de x em algum intervalo aberto contendo c. Se $f"(c)$ existe e

(i) se $f"(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;

(ii) se $f"(c) > 0$, então f tem um valor minimo relativo em c.

4. Resultados

Veremos a diante dois casos em que é possível observar a aplicação do Cálculo Diferencial e Integral (Problemas de otimização) na agricultura.

Exemplo 1 (Otimização da área – Melhor aproveitamento do terreno) Sabendo dos avanços e das novas tecnologias desenvolvidas na agricultura, um agricultor visando melhorar a produção em sua plantação decide adotar o sistema rotacional que consiste na divisão do terreno em duas ou mais partes promovendo a alternação da área a ser usada para a plantação. Ele possui 1200 m de cerca para construir uma nova área retangular a ser isolada sendo que um dos lados serão aproveitados de outro terreno. Quais serão as dimensões para que este agricultor consiga um aproveitamento maior dessa nova área?

Solução: Chamaremos os lados de x e y logo, a área dessa região é dada por $A(x,y) = xy$. Temos ainda que a soma das medidas dos três lados será 1200 m, isto é, $2x + y = 1200m \Rightarrow y = 1200 - 2x$. Assim, podemos reescrever a área do terreno como

$$A(x) = x(1200 - 2x) \Rightarrow A(x) = 1200x - 2x^2,\ 0 \leq x \leq 600.$$

Veja que $A'(x) = 1200 - 4x$. Tomando

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 1200 - 4x = 0\ \Rightarrow x = 300$$

Observamos que $A"(x) = -4$, ou seja, $A"(300) = -4 < 0$, logo $x = 300$ é o ponto de máximo. Substituindo em $y = 1200 - 2 * 300\ \Rightarrow y = 600$. Portanto as medidas que fornecerão a maior área a ser aproveitada são $x = 300\ m$ e $y = 600\ m$.

Exemplo 2 (Maximização de produção) Um agricultor da região do Cariri, no extremo Sul do Ceará, especialista na produção de maracujás quer obter um maior lucro com a produção do fruto. Considerando determinados aspectos do clima e o solo, estima-se que se 60 maracujazeiros forem plantados, a produtividade média será de 400 frutos por planta. Porém com a adição de novos maracujazeiros, a produção média cairá 4 frutos na produtividade média por planta adicionada. Analisando todos esses dados, quantas novas plantas devem ser inseridas para maximizar a produção?

Solução: Temos que a produção total f(x) é dada pelo produto entre quantidade de pés de maracujá $(60\ + x)$, onde x é a quantidade de plantas a serem adicionadas e quanto cada fruto produz $(400 - 4x)$. Assim,

$$f(x) = (60 + x)(400 - 4x)\ \Rightarrow f(x) = -4x^2 + 160x + 2400$$

Fazendo $f'(x) = 0\ \Rightarrow\ -8x\ + 160 = 0\ \Rightarrow\ x = 20$. Além disso,

$$f''(x)\ =\ -8\ \Rightarrow f''(20) = -8 < 0$$

Ou seja, pelo teste da segunda derivada, temos que $x = 20$ é um ponto de máximo para a função. Assim o agricultor deverá adicionar mais 20 maracujazeiros para maximizar a produção, totalizando em 80 plantas (60 iniciais com as 20 adicionadas). Neste caso, a produção total será de:

$$f(20) = -4(20)^2 + 160(20) + 2400 = 25\ 600 \text{ frutos.}$$

5. Considerações Finais

Sabemos que a matemática está diretamente ligada a nossa vivência em sociedade e que é uma ferramenta necessária no nosso cotidiano, não apenas uma disciplina a ser estudada no âmbito escolar. Contudo, muitas vezes essa percepção insiste em continuar, principalmente no que diz respeito aos primeiros anos escolares onde muitos professores não apresentam aos alunos essa aplicabilidade criando o julgamento que é uma ciência pura e sem aplicação prática.

Com o passar do tempo, vemos que a matemática é um instrumento indispensável para o desenvolvimento humano, e que assim como a agricultura vem ampliando-se e reinventando-se cada vez mais. Na agricultura serve para obter resultados verídicos, que com as informações necessárias e as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral é possível utilizar a matemática no nosso dia a dia em áreas que antes não se via nenhuma ligação.

Conclui-se que existe a necessidade de apresentar a aplicação da matemática desde o primeiro contato com o indivíduo, para que a barreira sobre ser uma ciência pura e acabada se desmistifique. Além do mais notamos a importância da mesma nas demais ciências e em situações que não se pensava utiliza-la.

Referências

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica** volume 1, 3ª ed. São Paulo, HARBRA ltda, 1994.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA Notas de Aula **Um pouco sobre a história do Cálculo**. Disponível em: http://mat.ufpb.br/~lenimar/histcalc.htm. Acesso em: 06 nov. 2021.

THOMAS, G. B. **Cálculo**, volume 1, tradução Kleber Pedroso *e* Regina Simille de Macedo; revisão técnica Claudio Hirofume Asano. - 12. ed. - São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

QUESTÕES DE GÊNERO: Conquistas e desafios das mulheres enquanto mães e universitárias

Daniele de Oliveira Sousa [1]
Cibele Oliveira Carvalho[2]
Kethlen Alves Rodrigues[3]
Maria Roseane Rodrigues Sampaio[4]
Verônica Nogueira do Nascimento[5]

RESUMO: As mulheres conseguiram adentrar no ambiente universitário a partir do século XX no Brasil, porém ainda enfrentam diversas dificuldades para permanecerem nas instituições de ensino. Essas dificuldades tornam-se mais evidentes quando se trata de discentes que já são ou se tornam mães no período de graduação. Dessa forma, a pesquisa buscou descrever as dificuldades e os limites existentes entre o processo de maternidade e a universidade. O presente estudo de campo, descritivo, com abordagem quantitativa, utilizou-se do formulário virtual (via Google Formulários) como instrumento de coleta de dados. Esta foi realizada com estudantes mães dos cursos de licenciatura em Ciências Biológicas, Letras e Matemática da Universidade Regional do Cariri, Unidade Descentralizada de Campos Sales, Ceará. Através dos resultados destaca-se como principais desafios enfrentado pelas discentes conciliar a falta de tempo para as atividades acadêmicas com a atenção e os cuidados com os filhos; como, também, a realização das atividades profissionais e domésticas, pois um número considerável de participantes não contam com o apoio paterno e se sentem sobrecarregadas frequentemente visto que o dever de cuidar, educar e acompanhar o crescimento dos filhos é culturalmente e historicamente ainda atribuído à mulher. Portanto, pensar em medidas que facilitem a permanência dessas mulheres em qualquer campo universitário torna-se importante, pois conquistar um espaço lúdico e local para amamentação, apoiar os projetos voluntários, além da construção de uma política ampla de permanência estudantil para mães, entre outras demandas, cria um ambiente acolhedor para estas e seus filhos, visando uma educação de qualidade.

Palavras-chave: Ensino Superior; mulheres; maternidade.

1. Introdução

Diante dos diversos momentos e emoções que marcam a vida da mulher, a maternidade é um marco histórico onde elas passam por um período de intensas

[1] Universidade Regional do Cariri, email: dany.sousa@urca.br
[2] Universidade Regional do Cariri, email: cibele.oliveira@urca.br
[3] Universidade Regional do Cariri, email: Kethlen.urca2017@urca.br
[4] Universidade Regional do Cariri, email: maria.roseane@urca.br
[5] Universidade Regional do Cariri, email: veronica.nogueira@urca.br

transformações psicológicas e físicas, pois terão que lidar com um novo ser e se dedicar por inteiro.

Muitas mulheres mães em busca de ascensão profissional e de um salário para prover o sustento do seu filho, adentram no ensino superior e encontram várias dificuldades no caminho, como deslocamento, condições financeiras, falta de apoio familiar e, principalmente, o julgamento da sociedade que exige que sejam mães, profissionais e donas de casa perfeitas.

Perante tais fatos percebemos que tornar-se mãe durante a formação acadêmica é complicado e desafiador uma vez que sendo mãe o instinto de proteger e cuidar dos filhos são prioridades, enquanto os estudos ficam como segunda opção, isso porque a maternidade ainda é tida como única e exclusiva responsabilidade da mulher. Tal fator está relacionado com o preconceito de gênero que vem desde o surgimento da humanidade, contudo, este problema que permeia a sociedade se desdobra por inúmeros setores (RIBEIRO, 2016).

Dessa forma, observa-se que o ambiente acadêmico é mais exaustivo durante a maternidade e necessita-se que as universidades criem viabilidades para a construção de um ambiente para atender as necessidades dessas mulheres enquanto mães, a fim de priorizarem a permanência delas e não a desistência da idealização de um sonho (SILVA; NUNES, 2019).

Portanto, vale ressaltar a relevância do diálogo sobre as dificuldades das mulheres no ambiente universitário, visto que todos os estudantes enfrentam diversos desafios, porém, enquanto mulheres e mãe estes são maiores devido ao estereótipo de serem julgadas quanto ao gênero e as suas funções sociais impostas pelo patriarcado.

2. Objetivos

Objetivou-se com o presente estudo descrever as dificuldades e os limites existentes entre o processo de maternidade e a universidade. A partir deste, buscou-se: traçar o perfil socioeconômico das mães universitárias; conhecer os desafios da mulher em conciliar as demandas acadêmicas e a maternidade; e verificar se existem ações estudantis na universidade que ofertem uma assistência voltada a este público.

3. Metodologia

O presente estudo de campo, descritivo, com abordagem quantitativa, abordou as estudantes mães dos cursos de Licenciatura em Ciências Biológicas, Letras e Matemática da Universidade Regional do Cariri, Unidade Descentralizada de Campos Sales, no período de novembro 2020. A coleta de dados se deu através de formulários criados na plataforma digital

Google Forms, utilizando-se como critérios de inclusão as educandas estarem regularmente matriculadas nos respectivos semestres; e aceitarem participar, voluntariamente, da presente pesquisa.

4. Resultados

O presente estudo contou com a participação de 25 mães universitárias da Universidade Regional do Cariri – URCA, Unidade Descentralizada de Campos Sales dos cursos de Ciências Biológicas, Letras e Matemática.

Inicialmente foi traçado o perfil socioeconômico das participantes e verificou-se que 76,0% revelaram ter entre 19 e 26 anos, enquanto 24,0% entre 27 a 34 anos de idade. Quando questionadas sobre seu estado civil, 72,0% disseram serem casadas ou viverem em união estável; e 28,0% revelaram serem mães solteiras, viúvas ou separadas. Em relação a possuírem renda individual 72,0% dizem ter sua própria renda e 28% são dependentes da renda do esposo.

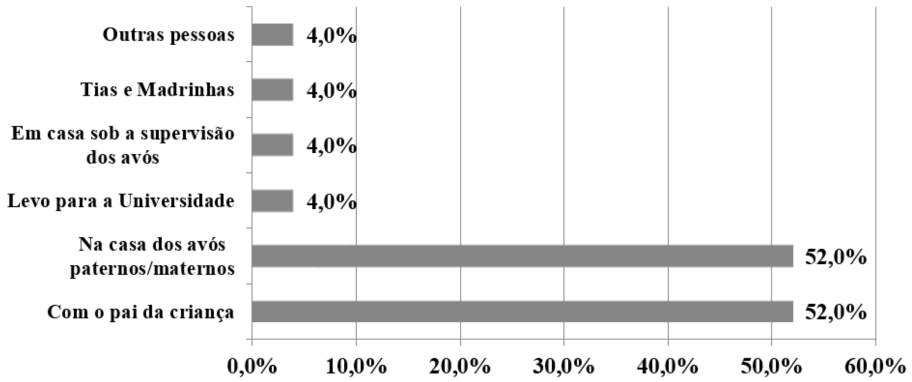
A partir dos resultados, nota-se que o desemprego também é um desafio enfrentado pelas mães, pois além de terem que arcar com as despesas da universidade ainda tem os gastos domésticos que sempre são colocados em primeiro lugar. Porém, vale ressaltar que apesar de a maioria possuir renda individual e trabalharem fora de casa, estas mulheres apresentam jornadas longas e cansativas tornando a permanência na faculdade instável, pois as mesmas podem a qualquer momento abdicar dos estudos em função da família (ÁVILA; PORTES, 2012).

Questionou-se, também, em relação as suas localidades, referente aos respectivos municípios, e observou-se que 40% destas reside na cidade de Campos Sales, enquanto que 56% residem em cidades vizinhas a este município. Vale ressaltar que 60% destas moram na zona rural e 40% na zona urbana. Torna-se relevante destacar que a maioria destas mães universitárias enfrenta dificuldades também com relação a seu deslocamento até a universidade, as quais se referem ao tempo de deslocamento e ao custeamento do transporte durante todo o semestre letivo.

Indagou-se sobre as participantes se sentirem sobrecarregadas em ser mãe e universitária, onde 84% revelaram se sentirem sobrecarregadas frequentemente ou sempre. Tal fator pode relacionar-se com as dificuldades enfrentadas em conciliar o ensino superior, visto que o dever de cuidar, educar e acompanhar o crescimento dos filhos é culturalmente e historicamente atribuído à mulher (MESQUITA *et al*., 2019).

As estudantes foram abordadas sobre com quem estas deixam seus filhos quando estão na universidade. Obteve-se os seguintes resultados diante da quantidade de respostas assinaladas:

GRÁFICO 1 – Depoimentos das discentes sobre com quem elas deixam os(as) filhos(as) quando estão na Universidade



Fonte: pesquisa direta, 2020.
*Percentual relativo à quantidade de respostas assinaladas.

Desta forma, observa-se que muitas destas entrevistadas contam com apoio familiar enquanto presentes no ambiente universitário, fator esse que consequentemente contribui de forma direta ou indireta para permanência dessas mulheres nas instituições de ensino até o final da graduação. Porém, algumas dessas mulheres precisam deixar seus filhos com terceiros ou levá-los para a universidade junto com elas, ou seja, muitas ainda não possuem suporte familiar e precisam lidar com a maternidade sozinha, o que as deixam extremamente cansadas para cumprir as atividades acadêmicas (COSTA, 2019).

O estudo interrogou, ainda, a percepção das discentes quanto a se sentirem excluídas das atividades acadêmicas e 64,0% afirmam que não se sentem excluídas; 24,0% disseram que raramente e 12% dizem-se excluídas frequentemente. Não podemos deixar de notar que mesmo que em número menor, elas apresentam problemas em participar destas atividades, provavelmente pela responsabilidade e preocupação de deixar seu filho por um dia aos cuidados de outras pessoas, ou muitas vezes a atenção que a criança precisa ter exclusivamente da mãe, como amamentação, principalmente, nos primeiros meses de vida.

Verificou-se a necessidade de saber quais as maiores dificuldades enfrentadas pelas mães universitárias. A nuvem de palavras a seguir, traz as palavras mais frequentes em seus depoimentos.

FIGURA 1 – Nuvem de palavras sobre os desafios e as dificuldades enquanto mães e universitárias

Fonte: pesquisa direta, 2020.

As participantes revelam que o principal desafio é a falta de tempo para conciliar a demanda de atividades acadêmicas que precisam ser entregues no prazo, com a atenção e os cuidados com os filhos, como também a realização das atividades profissionais e domésticas. Tais dificuldades tornam-se ainda mais evidentes quando se trata de mães chefes de família, as quais precisam realizar todas as demandas sozinhas ou precisam da ajuda de outras pessoas para realização das mesmas (RIBEIRO, 2016).

Sabendo dos desafios enfrentados pelas mães universitárias, procurou-se identificar quais políticas de assistências são ofertadas pela Universidade e se elas já haviam se beneficiado de alguma. 92,0% afirmaram que nunca se beneficiaram e apenas duas discentes (8,0%) relataram os benefícios recebidos através da licença maternidade. Porém, é válido ressaltar que a licença maternidade é um direito constitucional trabalhista, também utilizado em universidades, o que não pode ser aplicado exclusivamente como uma política educacional, uma vez que é um direito de todas, mas que ainda é desconhecido para muitas universitárias.

Visando a criação de estratégias para garantir o bem-estar e a permanência dessas universitárias nas instituições de ensino o estudo interrogou, ainda, quais políticas de assistência estudantil as mães universitárias gostariam que a Universidade viesse a ofertar. As respostas mais assinaladas foram: auxílio pré-escolar mensal (68,0% das respostas); creche universitária (52,0% das respostas); Núcleo de Desenvolvimento Infantil – NDI (40,0% das respostas); e auxílio transporte (16,0% das respostas).

Sugere-se, a partir dos resultados, que a implantação do Campus da URCA no município de Campos Sales, priorize, também, políticas assistenciais que contribuam para a permanência destas mães na Universidade.

5. Considerações Finais

Diante dos problemas vivenciados pela rotina discente, percebe-se que estes se tornam maiores quando envolvem as demandas das mães universitárias. É visível que as mulheres que se tornam mães ainda na universidade passam por muitas adversidades, onde precisam desdobrar-se em atividades e horários triplos, sendo pressionada a se saírem bem, como mãe, esposas, dona de casa e estudante, ficando assim sobrecarregadas.

Pensar em medidas que facilitem a permanência dessas mulheres em qualquer campo universitário torna-se fundamental, pois conquistar um espaço lúdico e local para amamentação; apoiar os projetos voluntários; implementar uma política ampla de permanência estudantil para mães; dentre outras demandas, cria um ambiente acolhedor para estas e seus filhos, visando uma educação de qualidade e o fortalecimento das ações sociais na luta pela igualdade de gênero.

6. Referências

ÁVILA, Rebeca Contrera; PORTES Écio Antônio. A tríplice jornada de mulheres pobres na universidade pública: trabalho doméstico, trabalho remunerado e estudos. **Revista Estudo Feminista**. vol.20 n.3 Florianópolis set./dez. 2012.

COSTA, Joelma Regina de Morais et al. **Geograficidade das mães universitárias do curso de licenciatura em educação do campo, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido.** 2019.43.f. Monografia. Graduação (Licenciatura em educação do campo), Universidade federal rural DO semi-árido.2016.

MESQUITA, A. P. *et al*. Quem pariu Mateus que balance": a reprodução do patriarcado e a solidão das mulheres/mães universitárias no cuidado com os/as filhos/as . in: 16º Congresso Brasileiro de Assistentes Sociais: 40 anos da Virada do Serviço Social" Brasília, 2019, **Anais**. Brasilia, P.1-12, 2019.

SILVA, Livia Maria Nascimento; NUNES, Cicera. **Trajetória acadêmica das mães estudantes da universidade regional do cariri**. In: IV SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA - XXII Semana de Iniciação Científica: Desmonte da Pesquisa, Ciência e Tecnologia: repercussões e impactos tecnológicos, sociais e culturais, IV, Crato, 2019, **Anais**. Crato, 2019. P.1-6.

RIBEIRO, Flavia Gripp. **Mães estudantes:** desafios da maternidade e da permanência na Universidade enfrentados pelas alunas do Curso de Serviço Social da UnB. 2016. 62.f. Monografia. Graduação (Serviço Social), Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

VELHO, L. Prefácio. In: SANTOS, L. W.; ICHIKAWA, E. Y.; CARGANO, D. F. (Org.). **Ciência, tecnologia e gênero:** desvelando o feminino na construção do conhecimento. Londrina: IAPAR, 2006.

TEORIA DOS NÚMEROS E A CRIPTOGRAFIA RSA

Sabrina Bento Pereira [1]

Antonia Nara de Alencar [2]

José Augusto Pereira Nogueira[3]

RESUMO: A teoria dos números é uma área da matemática usada há muitos anos, seu principal objetivo é estudar as propriedades dos números inteiros, por muitos era considerada um estudo sem aplicabilidade em algo prático. No entanto, com o passar do tempo foi-se percebendo que este ramo possui diversas aplicações, como por exemplo a criptografia. A criptografia é uma área que estuda a transmissão de dados de forma segura. Utiliza da teoria dos números para gerar segurança em transmissão de dados importantes no meio virtual, como senhas, compras, transações bancarias e demais atividades que envolvem o uso de informações pessoais. Nesse sentido o presente trabalho, realizado a partir de pesquisas bibliográficas, aborda o estudo da Criptografia RSA e como ela funciona com base na teoria dos números. No decorrer deste artigo são mostrados de forma sucinta a parte histórica da criptografia, propriedades e teoremas matemáticos essenciais para seu funcionamento, e um exemplo prático de como esta funciona e sua importância nos dias atuais.

Palavras-chave: Criptografia. RSA. Teoria dos Números.

1. Introdução

A teoria da dos números é uma ciência antiga que tem como principal objetivo estudar os números e estabelecer relações e propriedades. Embora quase toda a matemática da teoria dos números tenha sido desenvolvida sem nenhuma finalidade prática, podemos relacionar esta ciência à criptografia.

A criptografia é o estudo de métodos que permitem transmitir mensagens em cifras ou códigos, de maneira que apenas os legítimos destinatários sejam capazes de decodificar e ter acesso a mensagem com seu texto original. Esta ciência é utilizada desde os tempos antigos por meio de diferentes formas de cifragem, com os avanços tecnológicos e o advento da computação e da internet houve a necessidade de melhorar estes métodos criptográficos.

[1]Universidade Regional do Cariri - URCA, e-mail: sabrina.bento@urca.br.
[2] Universidade Regional do Cariri - URCA e-mail: antonia.nara@urca.br
[3]Universidade Regional do Cariri -- URCA, e-mail: augusto.nogueira@urca.br

A ligação entre teoria dos números e criptografia está no método criptográfico RSA, tal método faz uso de propriedades presente na teoria dos números para criptografar mensagens de forma extremamente segura.

Nesse sentido, este trabalho tem como proposta abordar a matemática necessária na implementação do sistema criptográfico RSA (criptografia assimétrica), este sistema funciona utilizando duas chaves, uma chave de codificação que será pública e uma chave de decodificação que será privada. A criptografia RSA está totalmente baseada na aritmética da divisibilidade e tem como base a teoria dos números.

Na criptografia RSA as chaves pública e privada são compostas por dois números naturas (p, n) e (q, n) respectivamente onde n é o produto de dois primos e p, q satisfazem determinadas relações. A segurança deste método criptográfico se justifica na fatoração de n, pois o texto cifrado só pode ser lido se conhecermos p e q.

Portanto, o trabalho estuda o método criptográfico RSA e sua relação com as propriedades presente na teoria dos números, enfatizando o estudo de codificação e decodificação.

2. Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo mostrar a relação do método criptográfico RSA com a teoria dos números.

3. Metodologia

A pesquisa foi realizada com base em pesquisas bibliográficas. O estudo do método criptográfico tratado no trabalho será demonstrado e justificado através de métodos presentes na teoria dos números.

4. Resultados

Criptografia RSA

O método criptográfico RSA é um algoritmo de criptografia de dados, que leva o nome de três professores do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, estes fundaram a então atual empresa RSA Data Security, Inc., que criaram este algoritmo — até 2008 este feito é o mais bem sucedido modelo de implementação de sistemas de chaves assimétricas, e fundamenta-se em teorias clássicas dos números. É considerado um dos mais seguros métodos de segurança.

Para tamanha segurança, a criptografia passa por alguns processos como geração de chaves, cifragem e decifragem. É durante o desenvolvimento das chaves que a criptografia RSA tem sua segurança firmada, isso se dá devido à utilização de teoremas e definições existentes na matemática, especificamente na teoria dos números.

Para acompanhar o processo da criptografia é necessário o conhecimento de alguns teoremas e propriedade da teoria dos números.

Divisibilidade: dados dois inteiros ($\mathbb{Z}$) $d, a, a \neq 0$, dizemos que a divide d, escrevemos $a \mid d$, se existir $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d = a \times n \; ou \; n \times a = d$, ou seja, d é um múltiplo de a. Quando a divide d, denotamos $a \mid d$. Caso contrário, a não divide d, escrevemos $a \nmid d$.

Teorema 1 (Algoritmo da Divisão): dados a, b com $b \neq 0$, existem inteiros únicos, tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$. ($r = 0$ se, e somente se, $b \mid a$). Chamamos q de quociente e r de resto da divisão.

Máximo Divisor Comum: $D\,(n)$ é denotado como conjunto dos divisores de n. Dados dois inteiros a, b com a e $(n, eb$ não nulos, $D\,(a, b)$ é o conjunto de todos os divisores comuns de a e b. Chama-se máximo divisor comum ao maior divisor comum de a e b, indicado por $mdc\,(a, b)$. $mdc\,(a, b)$ = max $D\,(a, b)\, D\,(a, b)$ é finito, assim sempre possui um maior elemento, como $a \neq 0, \mathrm{mdc}\,(a, b) \geq 1$.

Números Primos: é chamado de primo um inteiro $p > 1$ com exatamente dois divisores positivos, 1 e p.

Congruências: seja m ≠ 0 um inteiro fixo. Dizemos que a é congruente a b módulo m, sendo a e b dois inteiros, se m divide a – b. Escrevemos a ≡ b (mod m)

$$a \equiv b(mod\; m) \Leftrightarrow m|\; a - b \;\Leftrightarrow\; \exists\, q \in \mathbb{Z}\; tal\; que\; a - b = m \times q \;\Leftrightarrow a = m \times q + b$$

Portanto, a é côngruo a b módulo m, se, e somente se, b é o resto da divisão de $a\; por\; m$.

Função fi ($\boldsymbol{\varphi}$) de Euler: A função de φ de Euler é denotada $\varphi(m)$ e definida como sendo o número de inteiros positivos menores ou iguais a m que são relativamente primos com m.

Teorema 2 (Teorema de Euler): Sejam $m, a \in \mathbb{Z}, com\; m > 1\; e\; mdc\,(a, m) = 1\,.Então$:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1\; (mod\; m)$$

Geração das chaves no RSA

Para gerar a segurança das chaves devem ser realizados os seguintes processos matemáticos:

1. Devem ser escolhidos de forma aleatória dois números primos grandes $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$, que tenha no mínimo ordem 10^{100}.
2. Após escolhidos $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$, deve ser realizado o cálculo $\boldsymbol{n = pq}$. A segurança do método se dá principalmente na escolha dos números $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$,
3. O próximo passo é calcular a função totiente em $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\phi}\ (\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{p} - \mathbf{1})(\boldsymbol{q} - \mathbf{1})$
4. Escolha um inteiro **e** tal que $1 < \boldsymbol{e} < \phi(n)$, de forma que $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{\phi(n)}$ sejam primos entre si (ou seja, o único divisor comum seja 1).
5. Calcule **d** de forma que $\boldsymbol{de} \equiv \mathbf{1}\ (\boldsymbol{mod}\boldsymbol{\phi}\ (\mathbf{n}))$**,** ou seja, $\boldsymbol{d}$ seja o inverso multiplicativo de $\boldsymbol{e}$ em $(\boldsymbol{mod}\boldsymbol{\phi}\ (\mathbf{n}))$**.**

Então, temos a chave pública: o par (n, e), e a chave privada: a tripla (p, q, d).

Cifragem

Para que a mensagem seja criptografada, deve-se ser elevado cada bloco M a e, potência do modulo n. Então, o resultado criptografado C é o resto da divisão de $M^{\,e}$ por n.

$$M^{\,e} \equiv \mathrm{C}\ (mod\ n)$$

Decifragem

Para recuperar a mensagem cifrada, eleve C à potencia d e calcule o resto da divisão de $C^{\,d}$ por n.

$$C^{\mathrm{d}} \equiv \mathrm{M}\ (mod\ n)$$

Prática da Criptografia RSA

Para compreendermos o método de criptografia RSA, iremos criptografar a palavra NUMERO. Antes de iniciar o processo de codificação, existe a pré-codificação que se constitui em converter a mensagem em uma sequência de números.

Tabela 1 - Tabela de Conversão de letras para números

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	W	Y	Z
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36

Convertendo nossa mensagem, temos N=24, U=31, M=23, E=15, R=28, e O=25. Assim, a mensagem cifrada é 243123152825. Vamos utilizar números primos pequenos, já que o objetivo é verificar o processo do método. Escolhidos os primos $p = 7$ e $q = 11$ temos que $n = 7 \times 11 = 77$. E $\phi(n) = (p - 1)(q - 1) = 6 \times 10 = 60$.

O próximo passo é quebrar a mensagem em blocos, de maneira que cada um deles seja menor que $n = 77$, assim:

24	31	23	15	28	25
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6

Cada um desses blocos acima será criptografado pela formula $(M_i)^e \equiv C_i(mod n)$. Neste processo devemos escolher a chave pública $\boldsymbol{e}$, de modo que $1 < \boldsymbol{e} < \phi(n)$ e $mdc(e, \phi(n)) = 1$. Para este caso usaremos $e = 13$.

Assim, temos

$24^{13} \equiv 52(mod\,77) \Longrightarrow C_1 = 52$, $\quad 31^{13} \equiv 3(mod\,77) \Longrightarrow C_2 = 03$

$23^{13} \equiv 23(mod\,77) \Longrightarrow C_3 = 23$, $\quad 15^{13} \equiv 64(mod\,77) \Longrightarrow C_4 = 64$

$28^{13} \equiv 7(mod\,77) \Longrightarrow C_5 = 07$, $\quad 25^{13} \equiv 60(mod\,77) \Longrightarrow C_6 = 60$

Logo, obtemos a mensagem criptografada 520323640760.

Para decifrar a mensagem é necessário a fórmula $C_i^{d} \equiv M_i\ (mod\ n)$, com d sendo o inverso de $e(mod\ \phi(n)) \Rightarrow 13d \equiv 1\ (mod\ 60) \Rightarrow d = 37$

Decifrando a mensagem criptografada anteriormente, temos.

$52^{37} \equiv 24(mod\,77) \Longrightarrow M_1 = 24$, $\quad 3^{37} \equiv 31(mod\,77) \Longrightarrow M_2 = 31$

$23^{37} \equiv 23(mod\,77) \Longrightarrow M_3 = 23$, $\quad 64^{37} \equiv 15(mod\,77) \Longrightarrow M_4 = 15$

$7^{37} \equiv 28(mod\,77) \Longrightarrow M_5 = 28$, $\quad 60^{37} \equiv 25(mod\,77) \Longrightarrow M_6 = 25$

Por fim, obtemos a mensagem original, 243123152825.

O exemplo acima ilustra um exemplo com números primos pequenos. Entretanto, para números primos de ordem alta é praticamente impossível encontrar d, daí se dá dificuldade do processo de romper a segurança da mensagem.

Observação: os cálculos acima foram realizados através de uma calculadora online, a qual pode ser encontrada no link (https://pt.planetcalc.com/8326/).

5. Considerações Finais

A Criptografia RSA está apoiada na teoria dos números, ciência desenvolvida por grandes matemáticos como Fermat e Euler, e a segurança deste método se justifica a intimamente ligação ao fato de não existir algoritmo de fatoração eficiente para n.

Com o desenvolvimento deste trabalho foi possível compreender a segurança do método de Criptografia RSA e como sua eficiência se consagra através das propriedades existentes na matemática.

Portanto, este estudo permitiu concluir que a Teoria dos Números possui uma fundamentação teórica de grande relevância para o desenvolvimento da tecnologia, especificamente na segurança de dados, tal aplicabilidade de caráter abstrato, tem sua grande importância em grandes feitos primordiais para o cotidiano da sociedade.

Referências

OKUMURA, M. K. **Números Primos e Criptografia RSA** .TCC (Programa de Pós Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional).Instituto de Ciências Matemática e de Computação, Universidade de São Paulo, 2014. – Disponível em:< https://pt.scribd.com/document/384050995/Mirella-Okumura-Revisada>. Acesso em: 12 nov. 2021

SANTOS, C.S. **Criptografia RSA** TCC. (Curso de Licenciatura em Matemática) Universidade Federal de Alagoas – UFAL, Campus de Arapiraca, 2018.- Disponível em: https://www.escavador.com/sobre/277646784/maria-camilla-da-silva-santos. Acesso em: 12 nov. 2021

CASTRO, F. L. **Criptografia RSA: Uma abordagem para professores do ensino básico.** TCC (Universidade Federal do Rio Grande do Sul) Instituto de Matemática, Licenciatura em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2014. - Disponível em:< https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/110014> Acesso em: 15 nov. 2021.

LIMA, R.C. **Criptografia RSA e a Teoria dos Números.** (Programa de Pós Graduação em Mestrado Profissional em Rede nacional - PROFMAT) Universidade Federal de Paraíba – UFPB. – João Pessoa, 2013. Disponível em:https://www.escavador.com/sobre/6169976/roberval-da-costa-lima. Acesso em: 19 nov. 2021.

UM ESTUDO SOBRE OS NÚMEROS RACIONAIS COMO SUPORTE TEÓRICO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Nayara Alves da Silva[1]
Ozana da Silva Alencar[2]

RESUMO: No ensino dos números racionais ainda predomina o tradicionalismo caracterizado por um processo de memorização que acarreta a não desenvoltura e a falta de autonomia dos alunos. Enquanto limitados ao livro didático, material esse produzido de acordo com o nível de escolaridade do discente, e não do docente, muitos professores não têm embasamento teórico suficiente para conduzir o aluno ao entendimento pleno do que está a estudar. Nessa circunstância, dando continuidade ao projeto "Obstáculos didáticos e erros no processo de ensino aprendizagem de números racionais" objetivamos, através da revisão bibliográfica, desenvolver mais um material que sirva de fundamento teórico para professores de Matemática da Educação Básica voltado para o ensino dos Números Racionais, incentivando-os a ir além do livro didático. Em uma linguagem de fácil entendimento, apresentaremos a definição formal dos números racionais e discutiremos algumas sutilezas da mesma. Desejamos que este trabalho contribua para o aprimoramento da prática docente do professor de matemática ao ensinar sobre os números racionais.

Palavras-chave: Números racionais. Ensino-aprendizagem. Professor de matemática. Frações. Definição.

1. Introdução

O presente trabalho é parte do desenvolvimento do projeto "Obstáculos didáticos e erros no processo de ensino aprendizagem de números racionais". Segundo Nascimento (2008), *"as definições sobre os diversos tipos de frações, além de não fazerem sentido para o aluno, trazem conceitos abstratos e de difícil compreensão"*. Por se limitar ao livro didático, muitos professores não têm embasamento teórico suficiente para conduzir o aluno ao entendimento pleno do que está a estudar.

O professor precisa ter domínio da fundamentação teórica do que leciona, para que não venha "*somente a conduzir o aluno à memorização de fórmulas e procedimentos para resolução de exercícios, sujeitando o mesmo a uma aprendizagem mecânica"* (FREITAS e MIGUEL, 2017). Nesse sentido, "*o professor precisa se aperfeiçoar e se adaptar [...], mesmo*

[1] Universidade Regional do Cariri, e-mail: nayara.alves@urca.br
[2] Universidade Regional do Cariri, e-mail: ozana.alencar@urca.br

sabendo que ainda no ambiente de sala de aula predominam métodos tradicionais" (GOMES, FÉLIX e SILVA, 2018). É evidente que os professores que estão acostumados com a mesma rotina escolar acabam tendo dificuldades em se habituar a mudanças, entretanto é necessário se apropriar de novos conhecimentos e metodologias de ensino, deixando de lado os métodos essencialmente tradicionais.

Em uma linguagem de fácil entendimento, apresentaremos a definição formal do conjunto dos números racionais e discutiremos algumas sutilezas da mesma. Mais precisamente, veremos que é incorreto definir o conjunto dos números racionais como sendo o conjunto de todas as frações e que é também incorreto defini-lo como sendo, simplesmente, o conjunto das expressões a/b com a e b inteiros e b não nulo. É preciso, para obter a independência dos representantes, que consideremos as classes de todas as frações equivalentes. Veremos que dada uma fração ela pode ou não representar um número racional, que o número $\sqrt{2}$ não é racional e ainda falaremos sobre representações decimais finitas e infinitas.

2. Objetivos

Objetivamos tecer comentários acerca da definição dos números racionais e assim produzir um material de apoio para os professores de matemática da Educação Básica, incentivando-os a ir além dos livros didáticos.

3. Metodologia

A abordagem metodológica compreende a revisão bibliográfica da obra de NIVEN (1984).

4. Resultados

Definição do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais

Quando cogitamos acerca dos números racionais e das frações esses termos podem por vezes ser confundidos. Muitos professores dizem que o conjunto dos números racionais é o conjunto de todas as frações. Isso é um grande equívoco, pois o termo "fração" por si só,

remete a qualquer expressão algébrica dada por um numerador e um denominador. Por exemplo,

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{2}, \frac{23}{y}, \frac{y^2 - x^3}{x^2},$$

são frações, e, entretanto, como ficará claro adiante, não são necessariamente números racionais.

Definição 1 (frações equivalentes): Sejam a, b, A e B números inteiros com b e B não nulos. Dizemos que $\frac{a}{b}$ e $\frac{A}{B}$ são *frações equivalentes* se, e somente se, $aB = Ab$. Isto é,

$$\frac{A}{B} \equiv \frac{a}{b} \Leftrightarrow aB = Ab.$$

Dada a definição acima note que, se definirmos um número racional como sendo simplesmente uma expressão da forma a/d, onde aed são ambos os números inteiros e $d \neq 0$, essa ainda não é uma boa definição, pois depende da escolha dos representantes. Por exemplo, $\frac{2}{3}$ é equivalente às frações $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$,..., as quais são dadas por representantes distintos dos representantes 2 e 3 dados inicialmente. Assim, esses números racionais são, a priori, diferentes, mas ao fim, representam a mesma quantidade. Não é interessante que isso aconteça, ou seja, precisamos de uma definição que independa da escolha dos representantes.

Definição 2 (número racional): Um *número racional* $r = \frac{a}{b}$ é a classe de todas as frações equivalentes a $\frac{a}{b}$. Assim, dois números racionais são iguais se suas classes são iguais como conjuntos. O conjunto de todos os números racionais é denotado por Q.

Tendo definido o conjunto dos números racionais, surge outra questão: como saber se expressões dadas por frações, como por exemplo,

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \text{ e } \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

são números racionais? Na prática, essa resposta se dá por meio de manipulações aritméticas. Para o caso $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$podemos notar que

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4.3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1}.$$

Logo, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ é um número racional, pois por meio de manipulações aritméticas, este se encaixa na Definição 2, sendo $a = 2$ e $b = 1$. Isso é de certa forma surpreendente, pois a priori, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ não parecia, segundo a Definição 2, ser um número racional, uma vez que seu numerador e denominador não são números inteiros. Já no caso da fração $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$, temos

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

resultando $\sqrt{2}$ que, como veremos a seguir, não é racional. Logo, a fração $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ não é um número racional. Por isso, cabe aqui enfatizarmos mais uma vez que é incorreto dizer que $\mathbb{Q}$ é simplesmente o conjunto de todas as frações.

Proposição 1: O número $\sqrt{2}$ não é racional.

Prova: Sabemos que o quadrado de um inteiro par é par e o quadrado de um inteiro ímpar é ímpar. Suponhamos, que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Assim, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Suponhamos ainda que $\frac{a}{b}$ seja uma fração irredutível. Isso garante que a e b não são ambos pares. Elevando ao quadrado a equação acima, obtemos $2 = \frac{a^2}{b^2}$, donde, $a^2 = 2b^2$. O termo $2b^2$ representa um inteiro par. Logo, a^2 é par, e, portanto, a é par, digamos $a = 2c$, onde c também é um inteiro. Substituindo a por $2c$ na equação $a^2 = 2b^2$, obtemos

$$(2c)^2 = 2b^2 \Longrightarrow 4c^2 = 2b^2 \Longrightarrow 2c^2 = b^2.$$

O termo $2c^2$ representa um inteiro par, de modo que b^2 é par e, portanto, b é par. Mas isso é uma contradição. Portanto, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Representações decimais finitas e infinitas.

Existe uma forma alternativa de representar um número racional, a representação decimal. Por exemplo, os números decimais $0{,}5$, $0{,}4$ e $0{,}0125$ representam, respectivamente as frações

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \text{ e } \frac{1}{80}.$$

Essas são as chamadas representações finitas. É perceptível, nos exemplos acima, como é bem simples relacionar uma fração a um número decimal que a represente. Entretanto existem outros números racionais que têm uma representação decimal infinita, isto é, apresentam infinitas casas decimais após a vírgula, geralmente com repetições de alguns algarismos, como por exemplo,

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots;\ \frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots;\ \frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots$$

A partir desses exemplos surge uma pergunta natural: quais os números racionais que têm representação decimal finita? A resposta a essa pergunta é dada na obra que serviu de embasamento para esse trabalho, através do resultado a seguir.

Proposição 2: Um número irracional, na forma irredutível $\frac{a}{b}$ tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.

5. Considerações Finais

O ensino dos números racionais ainda conta com algumas falhas decorrentes da falta de conhecimento por parte dos docentes no que diz respeito à fundamentação teórica deste assunto. Algumas dessas falhas estão relacionadas à própria definição desse conjunto e à classificação dos seus elementos. Desejamos que este trabalho contribua para o aprimoramento da prática docente do professor de matemática ao ensinar sobre os números racionais.

Reforçamos que os professores não devem se limitar ao livro didático, mas devem buscar outras fontes, que de preferência tenham sido criadas especialmente para eles, que se debrucem sobre elas, cresçam em conhecimento e que esse saber reflita diretamente na sua prática docente através da autonomia e propriedade para tratar do assunto que leciona.

Referências

FREITAS, S. L.; MIGUEL, J. C. **Metodologias utilizadas para o ensino da matemática em uma escola do município de Cacoal- Rondônia:** um estudo analítico. 2017, UNESP.

GOMES, V. K. I.; FELIX, I. A.; SILVA, C. B. S. F. **O uso de objetos de aprendizagem no ensino das frações.** V CONEDU, 2018.

NASCIMENTO, J. do. Perspectivas para a aprendizagem e ensino dos números racionais. **Revista de iniciação cientifica da FFC**, v. 8, n. 2, p. 196 – 208, 2008.

NIVEN, I. **Números:** racionais e irracionais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.